

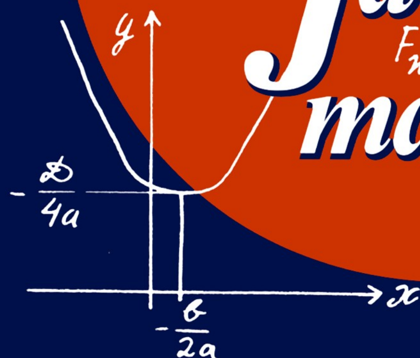
$$xf(x)+2f(1-x)=x^2+6$$

$$\sqrt{x^2+(8-y)^2}+\sqrt{y^2+(6-x)^2}$$

Jaunajam matematikui

$$F_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AC}$$



LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

LJMM

9

$$f(x)=|x-1|+|x+1|$$

$$\pi^2(k+1)^2-\pi^2k^2=\pi^2(2k+1)$$

$$1=4\sin\frac{\pi}{10}\left[1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right].$$

$$m_3=m_{12}+m_{13}+m_{23}$$

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

9

2006–2008 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2008

UDK 51(076)(05)
Ja712

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

ISBN 978-9955-476-61-0

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje devintojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2006–2008 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: Dirichlė principas (A. Urbonas), neapibrėžtųjų koeficientų metodas (A. Apynis), sumavimas (A. Apynis), logaritminės lygtys ir nelygybės (E. Tumėnaitė), geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai (E. Mazėtis), pilnosios tikimybės formulė (E. Stankus, J. Šinkūnas), vektoriai erdvėje (E. Mazėtis), progresijos (E. Stankus, J. Šinkūnas). Skaitytojas taip pat ras 2006 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2008 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių aštuonerių LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams, redaktorei Joanai Pribušauskaitei ir kolegei Kristinai Lyndienei už nuoširdų darbą leidžiant knygelę.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + xy + xy^2 = 26, \\ x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 = 156. \end{cases}$$

2. Apskaičiuokite reiškinį

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}, \text{ jei } xyz = 1.$$

3. Raskite keturis skaičius, kuriuos sudedant poromis yra gaunamos šešios sumos: 1, 2, 5, 6, 9 ir 10.

4. Raskite visus natūraliuosius skaičius, kurie yra 13 kartų didesni už savo skaitmenų sumą.

5. Raskite lygties $xy - 3x - 5y = 0$ sveikuosius sprendinius.

6. Du realieji teigiami skaičiai a ir b tenkina nelygybę $ab > 2006a + 2007b$. Įrodykite, kad $a + b > (\sqrt{2006} + \sqrt{2007})^2$.

7. Matematikos olimpiadoje dalyvavo po lygiai berniukų ir mergaičių. Žinoma, kad $\frac{2}{3}$ dalyvių išsprendė ne mažiau kaip po 2 uždavinius, nugalėtojų diplomus gavo mažiau kaip 25% išsprendusių du ir daugiau uždavinių, tarp nugalėtojų buvo 40% mergaičių. Koks galėjo būti mažiausias olimpiados dalyvių skaičius?

8. Veiksmas $\otimes$ tarp realiųjų skaičių a ir b apibrėžiamas formule: $a \otimes b = \max\{2a; a+b\}$. Išspręskite lygtį $x \otimes 3 = 5 \otimes x$.

Pastaba. Užrašas $\max\{m; n\}$ reiškia didesnįjį iš skaičių m ir n. Pavyzdžiui, $\max\{3{,}5; \sqrt{11}\} = 3{,}5$.

Veiksmo $\otimes$ pavyzdžiai:
$5 \otimes 2 = \max\{2 \cdot 5; 5+2\} = 10$; $(-2) \otimes 5 = \max\{2 \cdot (-2); -2+5\} = 3$.

9. Trikampio ABC kampas B yra statusis, o BD yra jo aukštinė. Į trikampius ADB ir BDC įbrėžtų apskritimų spinduliai atitinkamai lygūs 2,25 cm ir 3 cm. Raskite į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulį.

10. Ledo gabalas yra stačiakampio gretasienio formos. Ar šis ledo gabalas gali aptirpti taip, kad išliktų stačiakampio gretasienio formos, o jo visas paviršius ir tūris sumažėtų perpus? Atsakymą pagrįskite.



I. DIRICHLĖ PRINCIPAS

Algimantas Urbonas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Sprendžiant matematikos uždavinius (ypač rengiantis konkursams bei olimpiadoms) ne visada pakanka programinių mokyklinės matematikos žinių. Labai praverčia ir kiti uždavinių sprendimo metodai – Dirichlė principas, kraštinio elemento principas, invariantų metodas, matematinė indukcija, geometrinių vietų metodas. Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos programose šiems metodams skiriamas nemažas dėmesys. Teorinės medžiagos ir taikymo pavyzdžių galima rasti 2001–2006 metais Danieliaus leidykloje išleistose LJMM knygelėse „Jaunajam matematikui“.

Šiame straipsnelyje suformuluosime Dirichlė principą, išspręsime keletą uždavinių ir pateiksime užduotį LJMM klausytojams.

Dirichlė principas. Jeigu ($nk+1$) saldainį sudėtume į k dėžučių, tai bent vienoje dėžutėje būtų ne mažiau kaip ($n+1$) saldainis.

Dar paprasčiau šis principas formuluojamas, kai $n=1$: jeigu ($k+1$) saldainį sudėtume į k dėžučių, tai bent vienoje dėžutėje būtų ne mažiau kaip 2 saldainiai.

Dirichlė principas įrodomas prieštaros metodu. Nagrinėdami bendrąjį atvejį, tarkime, kad nė vienoje dėžutėje nėra ($n+1$) saldainio. Tada net ir tuo atveju, jei visose k dėžutėse būtų po n saldainių, iš viso būtų tik nk saldainių. Tačiau yra ($nk+1$) saldainis (!). Gautoji prieštara ir įrodo principo teisingumą.

Matome, kad Dirichlė principas yra formuluojamas gana paprastai ir lengvai suvokiamas. Tačiau konkrečiuose uždaviniuose ne visada paprasta surasti „saldainius“ ir sudėlioti juos į „dėžutes“.

Išnagrinėkime kelis Dirichlė principo taikymo pavyzdžius.

1 pavyzdys. Kvadrate su kraštine, lygia 1, yra pažymėtas 51 taškas. Įrodykime, kad skrituliuku, kurio spindulys $\frac{1}{7}$, galima uždengti ne mažiau kaip tris pažymėtus taškus.

Sprendimas. Tiesėmis, lygiagrečiomis su kraštinėmis, suskaidykime kvadratą į 25 vienodus kvadratėlius. Jų kraštinių ilgiai yra 0,2. Pagal

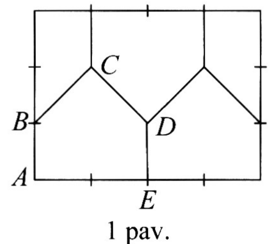
Dirichlė principą („saldainiai“ čia yra pažymėtieji taškai, o „dėžutės“ – 25 kvadratėliai) bent viename kvadratėlyje bus ne mažiau kaip 3 pažymėti taškai. Apie kiekvieną kvadratėlį apibrėžkime apskritimą. Jo spindulys yra mažesnis už $\frac{1}{7}$ (patikrinkite!); todėl kvadratėlį, taigi ir bent 3 taškus, galima uždengti skrituliuku, kurio spindulys $\frac{1}{7}$.

2 pavyzdys. Lygiakraščio trikampio su kraštine, lygia 2, viduje yra 5 taškai. Įrodykime, kad tarp jų yra nors du taškai, tarp kurių atstumas mažesnis už 1.

Sprendimas. Nubrėžę visas tris trikampio vidurines linijas, gauname keturis lygius lygiakraščius trikampius, kurių kraštinės lygios 1. Pagal Dirichlė principą bent viename trikampyje bus du taškai. Aišku, kad atstumas tarp jų yra mažesnis už 1.

3 pavyzdys. Stačiakampio, kurio matmenys yra 3×4, viduje pažymėti 6 taškai. Įrodykime, kad iš jų yra bent du taškai, tarp kurių atstumas mažesnis už $\sqrt{5}$.

Sprendimas. Stačiakampį padalykime į 5 dalis, kaip parodyta 1 paveiksle. Pagal Dirichlė principą bent vienoje dalyje bus mažiausiai du taškai. Įvertinkime atstumą tarp tų taškų. Sakykime, kad stačiakampio dalyje $ABCDE$ yra du taškai. Atstumas tarp jų, aišku, yra mažesnis už $AC = AD = CE = \sqrt{5}$. Tokį pat rezultatą gautume ir kitose stačiakampio dalyse.



1 pav.

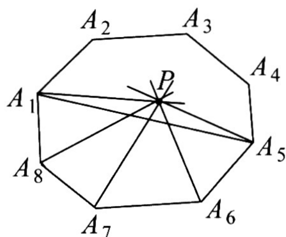
4 pavyzdys. Iškilojo aštuonkampio viduje yra pažymėtas taškas P. Per kiekvieną šio aštuonkampio viršūnę ir tašką P nubrėžta tiesė. Įrodykime, kad yra daugiakampio kraštinė, kurios nekerta nė viena iš šių tiesių.

Pastaba. Šiame uždavinyje turima mintyje, kad *tiesė kerta daugiakampio kraštinę*, jeigu ji eina per vidinį šios kraštinės tašką.

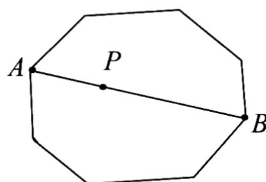
Sprendimas. Nagrinėkime du atvejus.

1) Taškas P nėra aštuonkampio $A_1A_2...A_8$ (žr. 2 pav.) įstrižainės taškas. Nubrėžkime įstrižainę A_1A_5. Abiejose jos pusėse yra po

4 kraštines. Tegu P yra daugiakampio $A_1A_2A_3A_4A_5$ viduje. Tada tiesės PA_1, PA_8, PA_7, PA_6, PA_5 negali kirsti kraštinių A_1A_8, A_8A_7, A_7A_6, A_6A_5. Jas galėtų kirsti tik tiesės PA_2, PA_3 ir PA_4. Tačiau tiesių yra trys, o kraštinių – keturios. Pagal Dirichlė principą bent viena kraštinė nėra kertama.



2 pav.



3 pav.

2) Taškas P yra įstrižainės AB taškas (žr. 3 pav.). Tada tiesės PA ir PB sutampa ir nekerta daugiakampio kraštinių. Lieka 6 tiesės, kurios gali kirsti tik 6 kraštines iš 8.

5 pavyzdys. Yra 12 skirtingų natūraliųjų skaičių. Įrodykime, kad tarp jų yra nors du skaičiai, kurių skirtumas dalijasi iš 11.

Sprendimas. Dalijant bet kokį skaičių iš 11, galima gauti tokias liekanas: 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10 (11 liekanų). Pagal Dirichlė principą („saldainiai“ čia yra skaičiai, o „dėžutės“ – liekanos) tarp dvylikos natūraliųjų skaičių yra bent du, kurių dalybos iš 11 liekanos vienodos. Todėl šių skaičių skirtumas dalijasi iš 11.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad kiekvienoje aštuonių asmenų grupėje yra bent du asmenys, turintys šioje grupėje po vienodą draugų skaičių.

2. Sodininkas trijų rūšių obuolius sudėjo į 25 dėžes. Kiekvienoje dėžėje yra tik vienos rūšies obuoliai. Įrodykite, kad yra bent 9 dėžės su tos pačios rūšies obuoliais.

3. Įrodykite, kad tarp skaičių 2^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, galima rasti bent du skaičius, kurių skirtumas dalijasi iš 2007.

4. Įrodykite, kad tarp bet kurių dešimties natūraliųjų skaičių galima rasti bent vieną skaičių, dalų iš 10, arba kelis skaičius, kurių suma dalijasi iš 10.

5. Kvadrato formos sklypelyje, kurio kraštinė yra 1 metras, pasėtos 76 agurkų sėklos. Įrodykite, kad bent keturios sėklos yra pasėtos kvadratėlyje, kurio kraštinė lygi 20 cm.

6. Kvadrato, kurio kraštinė lygi 1, viduje yra 5 taškai. Įrodykite, kad iš šių taškų yra bent du taškai, tarp kurių atstumas mažesnis už $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Stačiakampio, kurio matmenys yra 4×5, viduje pažymėti 6 taškai. Įrodykite, kad iš jų yra bent du taškai, tarp kurių atstumas mažesnis už $\sqrt{10}$.

8. Skaičiai $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ yra suskirstyti į tris grupes. Įrodykite, kad nors vienos iš šių grupių skaičių sandauga yra didesnė už 159.

9. Iškilojo dvylikakampio viduje yra taškas P. Per kiekvieną viršūnę ir tašką P nubrėžta tiesė. Įrodykite, kad yra bent viena daugiakampio kraštinė, kurios nekerta nė viena iš šių tiesių.

10. Iškilajame dešimtkampyje nubrėžtos visos įstrižainės. Raskite mažiausią taškų, kuriuos reikia pažymėti dešimtkampio viduje, skaičių, kad kiekvieno trikampio, kurio visos viršūnės yra dešimtkampio viršūnės, viduje būtų bent po vieną tašką. Kaip tuos taškus reikia išdėstyti?



II. NEAPIBRĖŽTŲJŲ KOEFICIENTŲ METODAS

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

1. Daugianarių skaidymas dauginamaisiais. Tegu $P(x)$ yra n-ojo laipsnio daugianaris:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 .$$

Jei x_0 būtų šio daugianario šaknis (galiotų lygybė $P(x_0) = 0$), tai jį būtų galima išskaidyti tokia sandauga:

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) ;$$

čia $Q(x)$ yra $(n-1)$ -ojo laipsnio daugianaris:

$$Q(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_1x + b_0 .$$

Toliau būtų galima tyrinėti galimybę išskaidyti dauginamaisiais daugianarį $Q(x)$ ir gauti išraišką

$$Q(x) = (x - x_1)S(x) ,$$

kurioje x_1 būtų daugianario $Q(x)$ šaknis (kai $Q(x_1) = 0$), o $S(x)$ – $(n-2)$ -ojo laipsnio daugianaris.

Tada turėtume tokį $P(x)$ skaidinį:

$$P(x) = (x - x_0)(x - x_1)S(x) ;$$

čia $S(x) = x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} + \ldots + c_1x + c_0$.

Atkreipkime dėmesį, kad ne visi daugianariai turi (realiųjų) šaknų. Čia pakanka prisiminti kad ir kvadratinį trinarį $x^2 + px + q$; jis neturi (realiųjų) šaknų, kai diskriminantas $D = p^2 - 4q$ yra neigiamas skaičius. Tokio trinario negalima išskaidyti dauginamaisiais $(x-a)$ ir $(x-b)$, kuriuose a ir b – kurie nors realieji skaičiai.

Aukštesnio laipsnio lygčių

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \ \ n \geq 3,$$

sprendimas gerokai palengvėja, kai pavyksta daugianarį $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ išskaidyti žemesnio laipsnio daugianarių, tarkime,

$$P_1(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_1x + b_0$$

ir

$$P_2(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + ... + c_1x + c_0$$

sandauga $P_1(x) \cdot P_2(x)$; čia $m, k \in \mathrm{N}$ ir $m + k = n$.

Susipažinkime su vienu daugianario skaidymo dauginamaisiais būdu – vadinamuoju neapibrėžtųjų koeficientų metodu. Šio metodo teorinis pamatas yra teiginys apie to paties laipsnio daugianarių, sakykime,

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

ir

$$Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 \quad (b_n \neq 0)$$

tapatumą: *daugianariai* $P(x)$ *ir* $Q(x)$ *yra tapatūs* (rašoma $P(x) \equiv Q(x)$) *tada ir tik tada, kai jų atitinkami koeficientai yra lygūs, t. y.* $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$.

Šio teiginio įrodymo čia nepateiksime.

1 pavyzdys. Daugianarį

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$$

išskaidykime dauginamaisiais $(x - a)$ ir $(x^2 + px + q)$; čia a, p ir q – realieji skaičiai.

Sprendimas. Ieškokime realiųjų skaičių a, p ir q, su kuriais galioja lygybė

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x - a)(x^2 + px + q). \qquad (1)$$

Sudauginę dvinarį su trinariu, turėsime lygybę

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = x^3 + (p - a)x^2 + (q - ap)x - aq,$$

kuri galioja su visais realiaisiais skaičiais x tik tada, kai

$$p - a = 3, \quad q - ap = 4, \quad aq = -4.$$

Taigi reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} p - a = 3, \\ q - ap = 4, \\ aq = -4. \end{cases} \qquad (2)$$

Į antrą lygtį įrašykime $q = -\dfrac{4}{a}$ (iš trečios lygties) ir (atlikę veiksmus) gausime lygtį

$$a^2 p + 4a + 4 = 0.$$

Toliau ją tvarkykime taip:

$$(a+2)^2 + (a^2 p - a^2) = 0 \Rightarrow (a+2)^2 + a^2 \cdot (p-1) = 0.$$

Ši lygtis turi sprendinį: $a = -2$, $p = 1$ (kitų sprendinių net neieškokime!). Tada $q = 2$. Trejetas $a = -2$, $p = 1$, $q = 2$ tenkina (2) sistemą. Gauname tokį daugianario $P(x)$ skaidinį:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x^2 + x + 2).$$

2 pavyzdys. Raskime realiuosius skaičius b, c, p ir q, su kuriais lygybė

$$x^4 + 1 = (x^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$$

galioja, kai x – bet kuris realusis skaičius.

Sprendimas. Sudauginkime kvadratinius trinarius ir (atlikę veiksmus) nagrinėkime tapatybę

$$x^4 + 1 = x^4 + (b+p)x^3 + (bp + c + q)x^2 + (cp + bq)x + cq.$$

Ji galioja tik tada, kai

$$b + p = 0,\ bp + c + q = 0,\ cp + bq = 0 \text{ ir } cq = 1.$$

Iš šių sąlygų gauname: $p = -b$, $q = \dfrac{1}{c}$; be to,

$$\begin{cases} bp + c + q = 0, \\ cp + bq = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b^2 + c + \dfrac{1}{c} = 0, \\ -bc + \dfrac{b}{c} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = c + \dfrac{1}{c}, \\ b\left(c - \dfrac{1}{c}\right) = 0. \end{cases}$$

Matome, kad $c > 0$ (iš pirmos lygties); tada $b \neq 0$ ir todėl $c - \dfrac{1}{c} = 0$.

Vadinasi, $c = 1$, $b^2 = 2$, $b = \pm\sqrt{2}$. Belieka apskaičiuoti p ir q: $p = \mp\sqrt{2}$, $q = 1$.

Gauname tokį skaidinį: $x^4 + 1 = (x^2 \pm \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 \mp \sqrt{2}\,x + 1)$.

2. Trupmeninių racionaliųjų reiškinių skaidymas paprasčiausiomis trupmenomis. Nagrinėsime trupmeninius racionaliuosius reiškinius

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

kuriuose skaitiklio daugianario $P(x)$ laipsnis yra mažesnis už vardiklio daugianario $Q(x)$ laipsnį. Pavyzdžiui, tokius:

$$\frac{5x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+3x+8)},\ \frac{2x+11}{(x-2)(x+3)(x^2+1)},\ \frac{5x^2-3x+4}{x^3+3x^2+4x+4)}.$$

Taikant neapibrėžtųjų koeficientų metodą šias racionaliąsias trupmenas (trupmeninius racionaliuosius reiškinius) galima išskaidyti tokio pavidalo *paprasčiausiomis trupmenomis*:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};$$

čia A, M, N bei a, p, q – realieji skaičiai, o x^2+px+q – neišskaidomas trinaris (jo diskriminantas D yra neigiamas).

3 pavyzdys. Raskime realiuosius skaičius A, M ir N, su kuriais galioja tapatybė

$$\frac{5x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+3x+8)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+3x+8}.$$

Sprendimas. Aišku, kad ši tapatybė galios tik tada, kai su visais realiaisiais skaičiais $x \neq -1$, galios tapatybė

$$5x^2+2x+3=A(x^2+3x+8)+(Mx+N)(x+1),$$

kuri yra ekvivalenti šiai:

$$5x^2+2x+3=(A+M)x^2+(3A+M+N)x+(8A+N).$$

Toliau sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} A+M \quad\quad = 5, \\ 3A+M+N=2, \\ 8A \quad\quad +N=3 \end{cases}$$

ir gauname vienintelį sprendinį: $A=1$, $M=4$, $N=-5$. Taigi

$$\frac{5x^2+2x+3}{(x+1)(x^2+3x+8)}=\frac{1}{x+1}+\frac{4x-5}{x^2+3x+8}.$$

Susipažinkime su trupmeninio racionaliojo reiškinio $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ skaidymo paprastosiomis trupmenomis atveju, kai vardiklio daugianaris $Q(x)$ turi kartotinių šaknų. Tegu, pavyzdžiui,

$$Q(x)=(x-1)^2(x-2).$$

Šiuo atveju daugiklį $(x-1)^2$ atitiks ne viena paprastoji trupmena $\dfrac{A}{x-1}$, o dviejų paprastųjų trupmenų suma $\left(\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{(x-1)^2}\right)$. Na, o daugiklį $(x-2)$ daugianario $Q(x)$ skaidinyje atitiks paprastoji trupmena $\dfrac{B}{x-2}$. Todėl skaidydami $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x-2)}$ paprastosiomis trupmenomis, turėtume ieškoti koeficientų A_1, A_2 ir B, su kuriais galiotų tokia tapatybė:

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-2}.$$

Analogiškai elgiamasi ir tada, kai daugianario $Q(x)$ šaknies kartotinumas yra didesnis už 2. Tegu šis daugianaris turi k-to kartotinumo šaknį $x=a$. Tada $Q(x)=(x-a)^k\cdot Q_1(x)$; čia $Q_1(x)$ yra atitinkamo laipsnio daugianaris, $k\geq 2$. Tada reiškinio $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ skaidinyje daugiklį $(x-a)^k$ atitiks tokia paprastųjų trupmenų suma: $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$.

Panašiai elgiamasi ir tada, kai $Q(x)$ skaidinyje neišskaidomo kvadratinio trinario (x^2+px+q) arba (ax^2+bx+c) laipsnis aukštesnis už vienetą. Tegu, pavyzdžiui, $Q(x)=(x^2+x+2)^k\cdot Q_2(x)$, $k\geq 2$.

Tada reiškinio $\frac{P(x)}{Q(x)}$ skaidinyje daugiklį $(x^2+x+2)^k$ atitiks tokia paprastųjų trupmenų suma:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+2)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+x+2)^k}.$$

Išsamiau su racionaliųjų reiškinių (sveikųjų ir trupmeninių) skaidymu galima susipažinti pastudijavus matematikams skirtus vadovėlius bei kitas knygas. Čia apsiribosime vien pavyzdžiais.

4 pavyzdys. Išskaidykime paprastosiomis trupmenomis racionalųjį reiškinį

$$\frac{9x^4+11x^3+2x^2-4x-3}{x^3(x+1)^2}.$$

Sprendimas. Matome, kad vardiklio daugianaris $x^3(x+1)^2$ turi dvi šaknis: $x=0$ ir $x=-1$. Pirmosios šaknies kartotinumas yra trys, o antrosios – du. Todėl pasirinktą trupmeninį racionalųjį reiškinį skaidysime taip:

$$\frac{9x^4+11x^3+2x^2-4x-3}{x^3(x+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Subendravardiklinkime dešiniąją pusę ir toliau nagrinėkime tokią lygybę:

$$9x^4+11x^3+2x^2-4x-3=$$
$$=(A_1+B_1)x^4+(2A_1+A_2+B_1+B_2)x^3+(A_1+2A_2+A_3)x^2+$$
$$+(A_2+2A_3)x+A_3.$$

Kad ji galiotų su visais realiaisiais skaičiais x, koeficientai A_1, A_2, A_3 ir B_1, B_2 turi tenkinti šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 9, \\ 2A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 11, \\ A_1 + 2A_2 + A_3 = 2, \\ A_2 + 2A_3 = -4, \\ A_3 = -3. \end{cases}$$

Šią sistemą visai nesunku išspręsti. Gauname:

$$A_3=-3\,,\ A_2=2\,,\ A_1=1\,,\ B_1=8\,,\ B_2=-1\,.$$

Taigi

$$\frac{9x^4+11x^3+2x^2-4x-3}{x^3(x+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{8}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

5 pavyzdys. Trupmeninį racionalųjį reiškinį

$$\frac{2x^4+x^3+7x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

išskaidykime paprastųjų trupmenų suma.

Sprendimas. Taikydami neapibrėžtųjų koeficientų metodą, ieškokime galimybės turimą racionalųjį reiškinį užrašyti tokia formule:

$$\frac{2x^4+x^3+7x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}\,.$$

Kai $x\neq-1$, ši lygybė yra ekvivalenti lygybei

$$\begin{aligned}&2x^4+x^3+7x^2+3x+3=\\&\quad=(A+M_1)x^4+(M_1+N_1)x^3+(2A+M_1+M_2+N_1)x^2+\\&\quad+(M_1+M_2+N_1+N_2)x+(A+N_1+N_2)\,.\end{aligned}$$

Ji yra teisinga su visais realiaisiais skaičiais x tik tada, kai A, M_1, M_2, N_1 ir N_2 tenkina šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases}A+M_1=2,\\ M_1+N_1=1,\\ 2A+M_1+M_2+N_1=7,\\ M_1+M_2+N_1+N_2=3,\\ A+N_1+N_2=3.\end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį:

$$A=2\,,\ M_1=0\,,\ M_2=2\,,\ N_1=1\,,\ N_2=0\,.$$

Vadinasi, racionalųjį reiškinį

$$\frac{2x^4+x^3+7x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

galima išskaidyti paprastosiomis trupmenomis vieninteliu būdu:

$$\frac{2x^4+x^3+7x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

3. Daugianarių skaidymas ir racionaliųjų lygčių sprendimas. Atkreipkime dėmesį į tai, kad daugianarių skaidymas dauginamaisiais (žemesnio laipsnio daugianariais) yra vienas iš racionaliųjų lygčių sprendimo būdų. Tas būdas yra visiškai natūralus, nes n-ojo laipsnio daugianario

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

skaidinio

$$P(x)=P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_k(x)$$

kiekvieno daugianario $P_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, k$, šaknys kartu yra ir daugianario $P(x)$ šaknys; taigi racionaliosios lygties $P(x)=0$ sprendiniai.

Kita vertus, taikant neapibrėžtųjų koeficientų metodą daugianariui $P(x)$ skaidyti reikia išspręsti tam tikrą lygčių sistemą. Tačiau reiškiant vienus nežinomus dydžius kitais galima gauti racionaliąją lygtį, kurios laipsnis aukštesnis už du. Pailiustruosime tai konkrečiu pavyzdžiu. Pabandykime išskaidyti trečio laipsnio daugianarį

$$P(x)=x^3-x^2-x-2$$

dvinario $(x-a)$ ir kvadratinio trinario (x^2+px+q) sandauga. Tapatybę

$$x^3-x^2-x-2=(x-a)(x^2+px+q)$$

gausime tik tada, kai koeficientai a, p ir q tenkins šią lygčių sistemą (tarpinių skaičiavimų čia nepateikiame):

$$\begin{cases} p-a=-1, & (3)\\ q-ap=-1, & (4)\\ aq=2. & (5)\end{cases}$$

Aišku, kad $a\neq 0$ (tai matyti iš (5) lygties). Todėl šiuo dydžiu galima išreikšti kitus du koeficientus, p ir q. Iš (5) lygties gauname $q=\frac{2}{a}$, iš (3) gauname $p=a-1$. O tada (įrašę p ir q išraiškas į (4)) turėsime trečio laipsnio (dydžio a atžvilgiu) racionaliąją lygtį

$$a^3-a^2-a-2=0. \qquad (6)$$

Matome, kad šios lygties kairioji pusė sutampa su skaidomuoju daugianariu $P(x)$, kai $a = x$. Taigi pakliuvome į savotišką užburtąjį ratą.

Kaip elgtis toliau? Pirmiausia derėtų išbandyti kitokią (3)–(5) lygčių sistemos analizės schemą (taip daryta pirmajame pavyzdyje!), kuri nevestų iki kubinės lygties sprendimo. Tačiau tai nėra visiškai paprasta. Žinoma, yra viena situaciją lengvinanti aplinkybė – pakanka rasti vieną koeficientų a, p ir q reikšmių, tenkinančių (3)–(5) sistemą, rinkinį, o ne visą sistemos sprendinių aibę. Todėl galėtume taikyti vadinamąjį „bandymų ir klaidų“ metodą. Pasirinkę, pavyzdžiui, $q = 1$, iš (5) lygties gautume $a = 2$; tada iš (4) lygties gautume vienintelę p reikšmę $p = 1$. Trejetas $a = 2$, $p = 1$, $q = 1$ tenkina ir sistemos (3) lygtį, todėl yra šios sistemos sprendinys. Taigi turime tokį daugianario $P(x)$ skaidinį:

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1) \qquad (7)$$

Atviras lieka tik skaidinio vienaties klausimas. Gvildendami jį, turėtume atlikti išsamią (3)–(5) sistemos analizę ir įrodyti, kad ši sistema daugiau sprendinių neturi (šios problemos čia nenagrinėsime).

Yra ir kita išeitis – ieškoti kubinės lygties $a^3 - a^2 - a - 2 = 0$ sveikųjų sprendinių.

Pateiksime (be įrodymo) tokią daugianario su sveikaisiais koeficientais **savybę**:

Jeigu daugianario

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

visi koeficientai yra sveikieji skaičiai, tai kiekviena sveikoji daugianario šaknis (lygties $P(x) = 0$ *sprendinys) yra laisvojo nario* a_0 *daliklis.*

Šiame teiginyje laisvasis narys a_0 taip pat laikomas daugianario koeficientu.

Remdamiesi šiuo teiginiu, galime tvirtinti, kad (6) lygtis gali turėti ne daugiau kaip keturis sveikuosius sprendinius. Tikrindami aibės $\{-1;\ 1;\ -2;\ 2\}$ skaičius, įsitikiname, kad lygtį tenkina tik skaičius $a = 2$. Tada lengvai randame ir kitus skaidinio koeficientus: $p = 1$, $q = 1$.

ANTROJI UŽDUOTIS

Išskaidykite kiek įmanoma mažesnio laipsnio dauginamaisiais šiuos daugianarius:

1. $P(x) = x(x-1)^2 - 2$;

2. $Q(x) = x^4 + 4x^2 + 3$;

3. $R(x) = x^4 + x^2 + 1$.

4. Įrodykite, kad daugianaris

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$$

yra kurio nors kvadratinio trinario kvadratas ir raskite tą kvadratinį trinarį.

5. Išskaidykite paprasčiausiomis trupmenomis šiuos trupmeninius racionaliuosius reiškinius:

5.1. $\dfrac{x^2 - 15x + 8}{(x+7)(x^2+5)}$;

5.2. $\dfrac{3x^2 - 3x - 1}{(x-2)^2(x^2+1)}$;

5.3. $\dfrac{x^2 + 7x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}$.

6. Raskite kvadratinio trinario $(x^2 + bx + c)$ koeficientų b ir c reikšmes, su kuriomis šis trinaris yra daugianario $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 4$ daliklis.

7. Raskite daugianario

$$P(x) = x^4 + mx^3 + 8x^2 + nx + 7$$

koeficientų m ir n reikšmes, su kuriomis kvadratinis trinaris $(x^2 + 3x + 7)$ yra $P(x)$ daliklis.

8. Skaidydami daugianarį

$$P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

nustatykite, kiek (realiųjų) sprendinių turi lygtis $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$. Raskite šiuos sprendinius.



III. SUMAVIMAS

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

1. Natūraliųjų skaičių laipsnių sumavimas. Iš pradžių susipažinkime su pirmųjų n natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., $n-2$, $n-1$, n suma. Pažymėkime ją S_1. Skaičių S_1, aišku, galima rasti tiesiogiai sumuojant. Tačiau toks sumavimas ir ilgas, ir nuobodus. Jau seniai turbūt pastebėjote, kad

$$1+n=2+(n-1)=3+(n-2)=\ldots=k+(n-(k-1))=\ldots$$

Pasinaudojus šia natūraliųjų skaičių savybe, nesunku išvesti visiškai paprastą formulę sumai

$$S_1=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

skaičiuoti. Išvedimas toks:

$$\begin{aligned}2S_1 &= (1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n)+\\ &\quad +(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1)=\\ &= (1+n)+(2+(n-1))+3+(n-2))+\ldots+\\ &\quad +((n-2)+3)+((n-1)+2)+(n+1)=n(n+1);\end{aligned}$$

tada

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Šią formulę galima išvesti ir kitaip. Žinome, kad

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Tegu $b=1$, o a „perbėga“ visas natūraliąsias reikšmes nuo 1 iki n. Skaičiavimo rezultatus rašykime stulpeliu:

$$\begin{aligned}&(1+1)^2=1^2+2\cdot1+1,\\ &(2+1)^2=2^2+2\cdot2+1,\\ &(3+1)^2=3^2+2\cdot3+1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &((n-1)+1)^2=(n-1)^2+2\cdot(n-1)+1,\\ &(n+1)^2=n^2+2\cdot n+1.\end{aligned}$$

Šį stulpelį galima užrašyti ir taip:

$$2^2 = 1^2 + 2\cdot 1 + 1,$$
$$3^2 = 2^2 + 2\cdot 2 + 1,$$
$$4^2 = 3^2 + 2\cdot 3 + 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n^2 = (n-1)^2 + 2\cdot(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^2 = n^2 + 2\cdot n + 1.$$

Sudėkime visas stulpelio lygybes ir gausime:

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 =$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 + 2S_1 + n,$$
$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n,$$
$$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1),$$
$$S_1 = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Šis dėsningumas yra ne toks akivaizdus kaip pirmasis. Vis dėlto jis yra gerokai „perspektyvesnis“, nes analogiškai taikant laipsnių $(k+1)^3$, $(k+1)^4$, $(k+1)^5, \dots$ formules, su $k = 1, 2, 3, \dots, n$ galima išvesti formules sumoms

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$
$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3,$$
$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

skaičiuoti.

Pradėkime nuo sumos S_2 formulės išvedimo. Sudėkime visas lygybes

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1,\ k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Gausime: $2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 =$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) +$$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n) + n,$$

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - S_1,$$

$$S_2 = \frac{(n+2)(n+1)n}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Taigi

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

Bazinė (atraminė) *formulė* sumai

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

skaičiuoti yra binomo $(a+b)^4$ formulė

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Sudėję visas lygybes

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

ir atlikę veiksmus (siūlome tai padaryti savarankiškai), gautume lygybę, siejančią S_3 su S_2 ir S_1:

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n.$$

Iš čia, pasinaudoję jau išvestomis (1) ir (2) formulėmis, gauname tokią formulę natūraliųjų skaičių kubų sumai skaičiuoti:

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}. \qquad (3)$$

Siūlytume LJMM klausytojui savarankiškai išvesti formules sumoms S_4, S_5, ... skaičiuoti.

2. Racionaliųjų trupmenų sumavimas. Yra įvairių būdų sumavimo formulėms išvesti, tačiau šį kartą apsiribokime uždaviniais, kuriuos sprendžiant galima labai veiksmingai taikyti neapibrėžtųjų koeficientų metodą (LJMM 2006–2008 m. m. programos 2 temą).

1 pavyzdys. Apskaičiuokime sumą

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Sprendimas. Kiekvieną šios sumos dėmenį galima užrašyti formule $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, 3, ..., n-1, n.$ Taikydami neapibrėžtųjų koeficientų metodą, trupmeną $\frac{1}{k(k+1)}$ lengvai išskaidytume paprastosiomis trupmenomis ir gautume

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Skaičiuojamą sumą pažymėkime S, o kiekvieną trupmeną $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, 3, ..., n-1, n,$ pakeiskime paprastųjų trupmenų skirtumu $\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$; gausime:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Ats.: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$

2 pavyzdys. Išveskime formulę sumai

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

skaičiuoti.

Sprendimas. Šios sumos dėmenys yra racionaliosios trupmenos

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \ k = 1, 2, 3, ..., \ n.$$

Išskaidykime jas paprastosiomis trupmenomis taikydami neapibrėžtųjų koeficientų metodą. Tegu

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}.$$

Tada

$$1 = A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1),$$

$$1 = (A+B+C)k^2 + (3A+2B+C)k + 2A.$$

Ši lygybė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais k tik tada, kai koeficientai A, B ir C tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ 3A + 2B + C = 0, \\ 2A = 1. \end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį: $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$. Vadinasi,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right), \ k = 1, 2, 3, ..., \ n..$$

Todėl

$$S = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + ... +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Ats.: $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

3. Kiti skaičių sumavimo būdai. Yra daug uždavinių, kuriems išspręsti nereikia specialių formulių bei žinių, o pakanka tik „ką nors pastebėti“.

3 pavyzdys. Apskaičiuokime sumą

$$S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!;$$

čia $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$, $k = 1, 2, 3, ..., n$.

Sprendimas. Sumuodami skaičius $k \cdot k!$, $k = 1, 2, 3, ..., n$, atkreipkime dėmesį į natūraliojo skaičiaus faktorialo apibrėžimą. Pagal jį $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$, todėl

$$k \cdot k! = ((k+1) - 1)k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!, \ k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Remdamiesi šiais samprotavimais gauname:

$$S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! =$$
$$= (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + (4-1) \cdot 3! + \ldots + ((n+1)-1) \cdot n! =$$
$$= (2 \cdot 1! - 1!) + (3 \cdot 2! - 2!) + (4 \cdot 3! - 3!) + \ldots + ((n+1) \cdot n! - n!) =$$
$$= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + ((n+1) - n!) =$$
$$= -1! + (n+1)! = (n+1)! - 1.$$

Ats.: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

4 pavyzdys. Apskaičiuokite sumą
$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n.$$

Sprendimas. Sumą S galima užrašyti dvejopai:
$$S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}) + 2^n$$
ir
$$S = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}).$$

Pažymėkime $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$ ir sudarykime lygtį $x + 2^n = 1 + 2x$. Ji turi vienintelį sprendinį: $x = 2^n - 1$. Dabar jau nebesunku apskaičiuoti ir sumą S:
$$S = (2^n - 1) + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Taigi
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

4. Sumavimo formulių pagrindimas matematinės indukcijos metodu. Matematikoje yra daug teiginių ir formulių, susijusių su natūraliaisiais skaičiais. Pavyzdžiui:

- bet kurių teigiamų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ *aritmetinį vidurkį*
$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
ir jų *geometrinį vidurkį*
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$
sieja nelygybė $A_n \geq G_n$;

- su visais natūraliaisiais skaičiais n, didesniais už vienetą, galioja lygybė

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}.$$

Bet kurį tokį teiginį žymėkime $T(n)$, $n \in \mathrm{N}$. Aišku, kad vieni teiginiai yra teisingi su visais natūraliaisiais skaičiais n (pavyzdžiui, „skaičius $(3n+9)$ dalijasi iš 3“), o kiti galioja tik su kai kuriais natūraliaisiais skaičiais n (pavyzdžiui, „skaičius (n^2+n+41) yra pirminis“; kai $n=41$, gautume sudėtinį skaičių, nes $41^2+41+41=41(41+1+1)=41\cdot 43$).

Daugelio teiginių $T(n)$, $n \in \mathrm{N}$ teisingumą su visais natūraliaisiais skaičiais (arba su $n \geq m$, m – kuris nors natūralusis skaičius) galima įrodyti taikant *matematinės indukcijos principą*. Jis formuluojamas taip:
jei

1) *teiginys* $T(1)$ *yra teisingas*

ir

2) *iš teiginio* $T(k)$, $k \in \mathrm{N}$, *teisingumo išplaukia teiginio* $T(k+1)$ *teisingumas,*

tai teiginys $T(n)$ *yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n.*

5 pavyzdys. Taikydami matematinės indukcijos metodą, įrodykime, kad su visais natūraliaisiais skaičiais n, didesniais už vienetą, galioja formulė

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!} \qquad (4)$$

Sprendimas. Nagrinėjamąsias formules pažymėkime F_2, F_3, ..., F_m, ... (priklausomai nuo pasirinkto natūraliojo skaičiaus n). Pavyzdžiui, formulė F_2 yra

$$\frac{1}{2!}=1-\frac{1}{2!},$$

o F_4 – tokia:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}=1-\frac{1}{4!}.$$

Simboliu $T(n)$ pažymėkime teiginį, kad formulė F_{n+1} yra teisinga; $n=1, 2, 3, \ldots$.

Turime įrodyti, kad teiginys $T(n)$, $n \in \mathrm{N}$, yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n. Taikykime matematinę indukciją.

Teiginys $T(1)$ (jis reiškia, kad formulė F_2 galioja) yra teisingas, nes

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \text{ ir } 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Tarkime, kad teiginys $T(n)$ yra teisingas su kuriuo nors natūraliuoju skaičiumi $n = k$.

Taigi darome prielaidą, kad formulė F_{k+1} galioja, t. y.

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} \tag{5}$$

Nagrinėkime teiginį $T(k+1)$. Remdamiesi (5) prielaida, gausime:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k+1}{(k+2)!} = \left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!}\right) + \frac{k+1}{(k+2)!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{k+1}{(k+2)!}\right) =$$

$$= 1 - \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}.$$

Matome, kad formulė F_{k+2} galioja (tarus, kad F_{k+1} galioja!). Vadinasi, teiginys $T(k+1)$ yra teisingas (žinoma, kai $T(k)$ yra teisingas).

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, kad teiginys $T(n)$, $n \in \mathrm{N}$, yra teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n. Kitaip sakant, (4) formulė galioja su visais didesniais už vienetą natūraliaisiais skaičiais.

Išsamiau su matematine indukcija galima susipažinti iš įvairių matematikos knygų. Medžiagos šia tema taip pat galima rasti LJMM leidžiamose knygelėse „Jaunajam matematikui" (R. Kašuba „Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai" (1 knyg., 32–37 psl.), D. Jurgaitis „Matematinės indukcijos metodas" (2 knyg., 50–56 psl.), A. Apynis ir E. Stankus „Indukcijos principas" (7 knyg., 29–35 psl.)).

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite sumą
$$\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+\ldots+\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2}{100}.$$

2. Apskaičiuokite sumą
$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots+\frac{1}{99^2-1}.$$

3. Apskaičiuokite sumą
$$7+77+777+\ldots+\underbrace{77\ldots7}_{10\text{ skaitmenų}}.$$

4. Išveskite formulę sumai
$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(4n+1)}$$
apskaičiuoti.

5. Išveskite formulę sumai
$$S_n=\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}$$
apskaičiuoti.

6. Išveskite formulę sumai
$$S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2$$
apskaičiuoti.

7. Išveskite formulę sumai
$$\frac{7}{1\cdot3\cdot4}+\frac{8}{2\cdot4\cdot5}+\frac{9}{3\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$$
apskaičiuoti.

8. Taikydami matematinės indukcijos metodą įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais n galioja šios formulės:

8.1. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

8.2. $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)};$

8.3. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$



IV. LOGARITMINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS

Erika Tumėnaitė

(Panevėžio Juozo Balčikonio gimnazija)

Ši tema yra vidurinės mokyklos matematikos programos dalis, todėl priminsime tik svarbiausias sąvokas ir savybes, kurių prireiks atliekant užduotį.

Logaritminėmis lygtimis yra vadinamos tokios lygtys, kurių nežinomasis yra po logaritmo ženklu.

Sprendžiant logaritmines lygtis labai praverčia logaritmo pagrindo keitimo formulė

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, a \neq 1; b > 0; c > 0, c \neq 1),$$

kurios atskirasis atvejis yra formulė

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1).$$

Neužmirškite ir kitų formulių:

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b;$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b;$$

$$\log_c(b^m) = m \log_c b;$$

$$\log_{c^n}(b) = \frac{1}{n}\log_c b;$$

$$\log_{c^k}(b^k) = \log_c b.$$

Šiose formulėse $a > 0,\ b > 0, c > 0, c \neq 1; n \neq 0, k \neq 0$.

Taip pat yra svarbūs šie teiginiai:

1. Logaritminė lygtis

$$\log_a f(x) = b$$

yra ekvivalenti lygčiai

$$f(x) = a^b;$$

čia $a > 0, a \neq 1$.

2. Logaritminė lygtis

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$$

yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Logaritminėmis nelygybėmis yra vadinamos tokios, kurių kintamasis yra po logaritmo ženklu.

Sprendžiant nelygybes reikia atkreipti dėmesį į šį **teiginį**:

logaritminė nelygybė

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$$

yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 1 \end{cases}$$

arba nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < a(x) < 1. \end{cases}$$

Išnagrinėkime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Išspręskime logaritminę lygtį

$$\log_{0,5}(x^3 - 3x + 1) = \log_{0,5}(x + 1).$$

Sprendimas. Ši lygtis yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = x + 1, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Spręsdami ją gauname:

$$\begin{cases} x^3 - 4x = 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2)(x+2) = 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \{0; 2; -2\}, \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \{0; 2\}.$$

Ats.: 0; 2.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{2\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}\ .$$

Sprendimas. Žinome, kad $\sqrt{x^2} = |x|$. Dar turėtume atkreipti dėmesį į lygties apibrėžimo sritį (ją nusako nelygybės $(-x) > 0$ ir $\lg(-x) \geq 0$). Taigi lygtis yra ekvivalenti šiai sistemai:

$$\begin{cases} 2\lg(-x) = \lg^2(-x), \\ \lg(-x) \geq 0, \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lg(-x) = \lg^2(-x), \\ x < 0. \end{cases}$$

Ją sprendžiame taip:

$$\begin{cases} \lg(-x)\cdot(\lg(-x) - 2) = 0, \\ x < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg(-x) = 0 \text{ arba } \lg(-x) = 2, \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ($x = -1$ arba $x = -100$).

Ats.: -1; -100.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\log_4 x^2 + \log_{x^6} 64 = 2\ .$$

Sprendimas.

$$\log_4 x^2 + \log_{x^6} 64 = 2 \Rightarrow \log_2|x| + \log_{|x|} 2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2|x| + \frac{1}{\log_2|x|} = 2 \Rightarrow \log_2^2|x| - 2\log_2|x| + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2|x| - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_2|x| - 1 = 0 \Rightarrow \log_2|x| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x \in \{-2; 2\}\ .$$

Ats.: -2; 2.

4 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x+y), \\ \log_2(x+y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$$

Sprendimas.

$$\begin{cases} 2-\log_2 y = 2\log_2(x+y), \\ \log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y^2)=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2(y(x+y)^2)=2, \\ \log_2(x^3+y^3)=1, \\ x+y>0, \\ y>0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2(y(x+y)^2)=2, \\ \log_2(x^3+y^3)=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x+y)^2=4, \\ x^3+y^3=2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x+y)^2=2(x^3+y^3), \\ x^3+y^3=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x+y)=2(x^2-xy+y^2), \\ x^3+y^3=2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0, \\ x^3+y^3=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2\left(2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\dfrac{x}{y}+1\right)=0, \\ x^3+y^3=2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}=1 \text{ arba } \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ x^3+y^3=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x, \\ x=1 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} y=2x, \\ x=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{3}. \end{cases}$$

Ats.: $(1;\ 1)$, $\left(\dfrac{\sqrt[3]{6}}{3};\ \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{6}}{3}\right)$.

5 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$2\log_2 x - \log_x 16 < 2\,.$$

Sprendimas.

$$2\log_2 x - \log_x 16 < 2 \ \Rightarrow\ 2\log_2 x - \frac{4}{\log_2 x} < 2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{2\log_2^2 x - 2\log_2 x - 4}{\log_2 x} < 0 \ \Rightarrow\ \frac{2(\log_2 x+1)(\log_2 x-2)}{\log_2 x} < 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(\log_2 x+1)(\log_2 x-2)>0,\\ \log_2 x<0\end{cases} \text{arba} \begin{cases}(\log_2 x+1)(\log_2 x-2)<0,\\ \log_2 x>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\log_2 x<-1 \text{ arba } \log_2 x>2,\\ \log_2 x<0\end{cases} \text{arba} \begin{cases}-1<\log_2 x<2,\\ \log_2 x>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x<-1 \quad \text{arba} \quad 0<\log_2 x<2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<x<\frac{1}{2} \text{ arba } 1<x<4.$$

Ats.: $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;4)$.

6 pavyzdys. Pavaizduokime (stačiakampėje Dekarto koordinačių plokštumoje) nelygybių sistemos

$$\begin{cases}3^{x^2+y^2}\le 81,\\ \log_{0,5} y\ge \log_2\dfrac{1}{2-x}\end{cases}$$

sprendinių aibę.

Sprendimas. Pirmosios nelygybės sprendinių aibę pažymėkime S_1, antrosios – S_2, sistemos sprendinių aibę S. Iš pirmosios nelygybės gauname $x^2+y^2\le 4$.

Iš antrosios nelygybės, suvienodinę pagrindus, gausime:

$$\log_{0,5} y\ge \log_{0,5}(2-x) \Rightarrow \begin{cases}y\le 2-x,\\ y>0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y\le 2,\\ y>0.\end{cases}$$

Taigi pirmosios nelygybės sprendinių aibė yra

$$S_1=\{(x;y): x^2+y^2\le 4\},$$

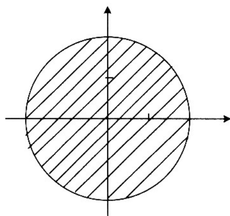
o antrosios – aibė

$$S_2=\{(x;y): x+y\le 2, y>0\}.$$

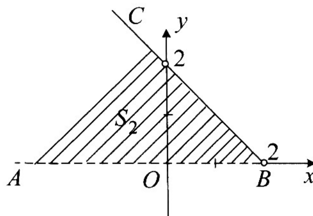
Šių aibių bendroji dalis (sankirta) yra nelygybių sistemos sprendinių aibė S.

Aibės S_1 geometrinis vaizdas yra skritulys, kurio centras yra (0; 0), o spindulys lygus 2 (žr. 1 pav.). Aibės S_2 geometrinis vaizdas yra

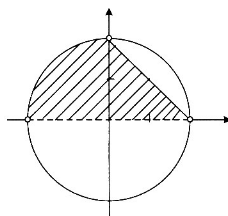
kampas ABC, t. y. plokštumos dalis tarp tiesių $x+y=2$ ir $y=0$ (žr. 2 pav.). Šio kampo kraštinė AB pažymėta punktyrine linija, nes ji aibei S_2 nepriklauso. Aibė S yra pavaizduota 3 paveiksle.



1 pav.



2 pav.



3 pav.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį $\lg^3(0{,}25x^2)=8\lg(0{,}5x)$.

2. Išspręskite lygtį
$1+\log_x 2+\log_x 4+\log_x 8+\ldots+\log_x 2^{99}=2\log_2 x$.

3. Išspręskite lygtį
$$3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9.$$

4. Išspręskite lygtį
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\cdot x^{0{,}5\left(\log_2 x^2\right)^2-7}=2x^8.$$

5. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases}\log_{xy}(x^2-y^2)=1,\\ \log_{xy}(x-y)=0.\end{cases}$$

6. Kokio ilgio intervalą užpildo nelygybės $\log_x(x+2)>2$ sprendiniai?

7. Išspręskite nelygybę $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$.

8. Išspręskite nelygybę $f(x) < 2{,}4$, kai

$$f(x) = \frac{\log_2 \frac{x}{4} \cdot \log_2 4x}{\log_2 2x}.$$

9. Įrodykite, kad lygtis $\log_2 x = 6 - x$ turi vienintelį sprendinį.

10. Raskite figūros, kurią Dekarto koordinačių plokštumoje xOy apibrėžia nelygybių sistema

$$\begin{cases} 2^{x^2+y^2} \le 16, \\ \lg y \ge \log_{0,1} \dfrac{1}{x+2}, \end{cases}$$

plotą.



V. GEOMETRIJOS UŽDAVINIŲ SPRENDIMO ANALIZINIAI METODAI

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

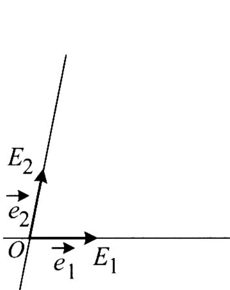
Geometrijos uždavinių sprendimą dažnai palengvina tinkamas koordinatinių (arba analizinių) metodų taikymas. Atlikdami šią užduotį, susipažinsite ne tik su stačiakampe Dekarto koordinačių sistema, bet ir su kitomis plokštumos koordinačių sistemomis.

Plokštumos koordinačių sistemos gali būti apibrėžiamos įvairiais būdais. Nustatyti koordinačių sistemą – tai nurodyti tokią taisyklę, pagal kurią bet kuriam plokštumos taškui M vienareikšmiškai priskiriama realiųjų skaičių pora $(x; y)$ – taško M koordinatės.

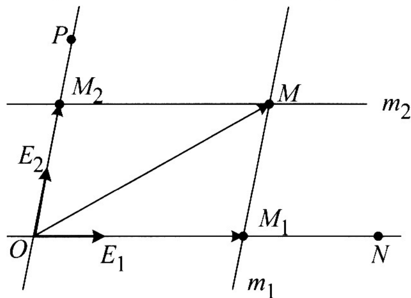
Matematikos pamokose susipažinote su stačiakampe Dekarto koordinačių sistema, taip pavadinta žymaus prancūzų matematiko ir filosofo Rene Dekarto (René Deckartes, 1596–1650) garbei. Stačiakampė Dekarto koordinačių sistema yra atskiras plokštumos afiniųjų koordinačių sistemų atvejis.

Plokštumos *afiniąja koordinačių sistema* arba *afiniuoju reperiu* vadiname plokštumos taškų, nepriklausančių vienai tiesei, trejetą $(O; E_1; E_2)$. Taškas O vadinamas *koordinačių sistemos pradžios tašku*, tiesės OE_1 ir OE_2 vadinamos *koordinačių ašimis* (*abscisių* ir *ordinačių* ašimis), o vektoriai $\vec{e_1} = \vec{OE_1}$ ir $\vec{e_2} = \vec{OE_2}$ vadinami šios koordinačių sistemos *baziniais vektoriais* (1 pav.). Išsiaiškinsime, kaip šioje koordinačių sistemoje nustatomos taško M koordinatės. Per tašką M brėžiame tieses m_1 ir m_2, lygiagrečias atitinkamai su koordinačių ašimis OE_2 ir OE_1 (2 pav.). Sakykime, kad tiesės OE_1 ir m_1 susikerta taške M_1, o tiesės OE_2 ir m_2 – taške M_2. Kadangi taškai O, E_1 ir M_1 yra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\vec{OE_1}$ ir $\vec{OM_1}$ yra *kolinearūs*; todėl egzistuoja skaičius x, su kuriuo $\vec{OM_1} = x\vec{e_1}$. Analogiškai vektoriai $\vec{OE_2}$ ir $\vec{OM_2}$ kolinearūs, todėl egzistuoja skaičius y, su kuriuo $\vec{OM_2} = y\vec{e_2}$.

Pagal vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę $\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$, todėl $\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Skaičiai $(x; y)$ yra taško M koordinatės koordinačių sistemoje $(O; E_1; E_2)$. Akivaizdu, kad $O(0; 0)$, $E_1(1; 0)$, $E_2(0; 1)$. Taškas N yra abscisių ašyje, todėl jo koordinatės yra $(x; 0)$, o taškas P yra ordinačių ašyje, todėl jo koordinatės yra $(0; y)$.



1 pav.



2 pav.

Sakykime, kad $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ – du skirtingi plokštumos taškai. Pagal koordinačių apibrėžimą

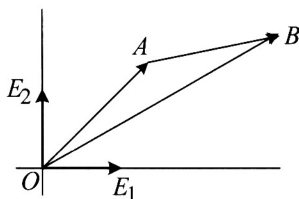
$$\vec{OA} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}, \quad \vec{OB} = x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2}$$

(žr. 3 pav.). Kadangi

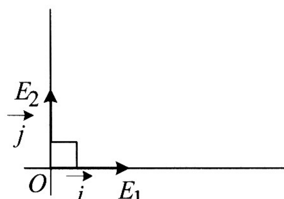
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1)\vec{e_1} + (y_2 - y_1)\vec{e_2},$$

tai vektoriaus $\vec{AB}$ koordinatės koordinačių sistemoje $(O; E_1; E_2)$ yra skaičių pora $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$.

Pastebėkime, kad kai tiesės OE_1 ir OE_2 yra statmenos, o atstumai OE_1 ir OE_2 lygūs 1, gauname stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą (4 pav.), su kuria susipažinote matematikos pamokose. Dekarto koordinačių sistemos baziniai vektoriai $\vec{OE_1}$ ir $\vec{OE_2}$ paprastai žymimi $\vec{i}$ ir $\vec{j}$.

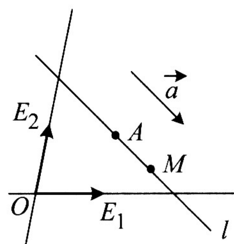


3 pav.



4 pav.

Sakykime, kad $\vec{a} = l\vec{e_1} + m\vec{e_2}$ – nenulinis vektorius, $A(x_0; y_0)$ – plokštumos taškas. Tuomet per tašką A eina vienintelė tiesė l, lygiagreti su vektoriumi $\vec{a}$ (5 pav.). Taškas $M(x; y)$ yra tiesėje l tada ir tik tada, kai vektoriai $\vec{AM}$ ir $\vec{a}$ kolinearūs, t. y. kai yra toks skaičius t, su kuriuo teisinga lygybė $\vec{AM} = t\vec{a}$. Kadangi $\vec{AM}\{x - x_0; y - y_0\}$, $\vec{a}\{l; m\}$, tai $x - x_0 = lt$, $y - y_0 = mt$, arba



5 pav.

$$x = x_0 + lt,\quad y = y_0 + mt \tag{1}$$

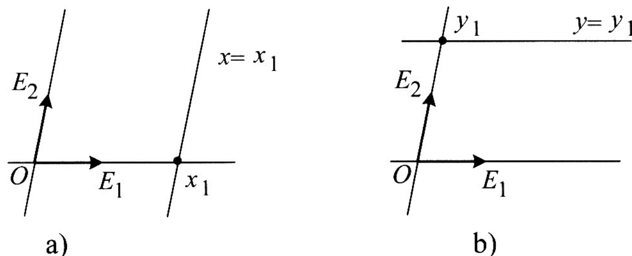
Šios dvi lygtys yra vadinamos tiesės l parametrinėmis lygtimis (t yra parametras). Kiekvieno tiesės l taško M koordinates $(x; y)$ atitinka vienintelė parametro t reikšmė, o bet kuriai realiajai parametro t reikšmei iš (1) lygčių randamos ją atitinkančio vienintelio tiesės l taško koordinatės $(x; y)$.

Jei $l \neq 0$ ir $m \neq 0$, tai iš (1) lygčių gauname lygtį $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$, arba $mx - ly + ly_0 - mx_0 = 0$. Pažymėję $A = m$, $B = -l$, $C = ly_0 - mx_0$, gauname bendrąją tiesės l lygtį

$$Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Jei $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ – du skirtingi taškai, tai vektorius $\vec{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ yra kolinearus su tiese AB; todėl pagal (1) tiesės

AB parametrinės lygtys yra $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$. Jei $x_1 = x_2$, tai iš šių lygčių gauname tiesės, lygiagrečios su ordinačių ašimi (6a pav.), lygtį $x = x_1$. Ordinačių ašies lygtis yra $x = 0$.



6 pav.

Jei $y_1 = y_2$, tai gauname tiesės, lygiagrečios su abscisių ašimi (6b pav.), lygtį $y = y_1$. Abscisių ašies lygtis yra $y = 0$.

Kai $x_1 \neq x_2$ ir $y_1 \neq y_2$, gauname

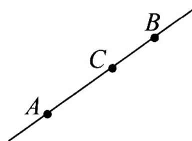
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (3)$$

– tiesės, einančios per taškus A ir B lygtį.

Jei l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – dvi plokštumos tiesės, tai jų susikirtimo taško koordinatės tenkina tiek vienos, tiek kitos tiesės lygtį. Tai reiškia, kad jos yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

sprendiniai. Kai $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, tai tiesės l_1 ir l_2 sutampa, o kai $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ – tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios.



7 pav.

Sakykime, kad taškas C yra atkarpoje AB ir $AC : CB = \lambda$ (7 pav.), t. y. $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. Kadangi

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC},$$

tai $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$, arba $(1+\lambda)\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ ir

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$. Iš čia randame taško C koordinates:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}. \qquad (4)$$

Atskiru atveju, kai taškas C yra atkarpos AB vidurys,

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

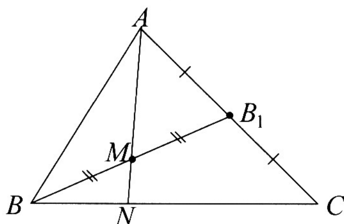
Jei $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – trikampio viršūnės, tai kraštinės AB vidurio taško D koordinatės yra $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$. Kadangi trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas M pasižymi savybe $CM:MD=2$, tai (pagal (4) formules) $x_M=\dfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y_M=\dfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

1 pavyzdys. Taškas M yra trikampio ABC pusiaukraštinės BB_1 vidurio taškas, tiesė AM kerta kraštinę BC taške N. Raskime, kokiu santykiu taškas N dalija kraštinę BC.

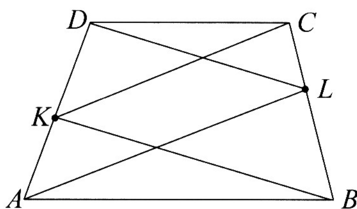
Sprendimas. Pasirinkime afiniąją koordinačių sistemą $(B;A;C)$. Tuomet trikampio viršūnių koordinatės yra: $B(0;0)$, $A(1;0)$, $C(0;1)$ (8 pav.). Pagal (4) formules taško B_1 koordinatės $B_1\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, tuomet $M\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. Rašome tiesės AN lygtį ((3) lygtis): $\dfrac{x-1}{\frac{1}{4}-1}=\dfrac{y-0}{\frac{1}{4}-0}$, arba $x+3y-1=0$. Šios tiesės ir tiesės BC (ordinačių ašies $x=0$) susikirtimo taško N koordinatės yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+3y-1=0,\\ x=0 \end{cases}$$

sprendinys, t. y. $N\left(0; \frac{1}{3}\right)$. Taigi $\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ todėl $\vec{BN} = \frac{1}{3}\left(\vec{BN} + \vec{NC}\right)$, t. y. $\frac{2}{3}\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{NC}$. Iš čia $BN : NC = \frac{1}{2}$.



8 pav.



9 pav.

2 pavyzdys. Trapecijos $ABCD$ šoninėse kraštinėse AD ir BC pažymėti taškai K ir L taip, kad tiesės AL ir CK lygiagrečios. Įrodykime, kad tiesės BK ir DL taip pat lygiagrečios.

Sprendimas. Sakykime, kad $(A; B; D)$ – afinioji koordinačių sistema. Tada taškų A, B ir D koordinatės: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $D(0; 1)$. Kadangi tiesės CD ir AB lygiagrečios, tai tiesės CD lygtis yra $y = 1$; todėl taško C koordinatės yra $C(c; 1)$ (9 pav.). Kadangi taškas K yra ordinačių ašyje, tai jo koordinatės $K(0; \alpha)$. Tiesės BC lygtis yra $\frac{x-1}{c-1} = \frac{y-0}{1-0}$, arba $x + (1-c)y - 1 = 0$. Taško L ordinatę pažymėję β, randame $x = 1 - (1-c)\beta$. Taigi taško L koordinatės yra $L(1-(1-c)\beta; \beta)$.

Iš čia $\vec{KC}\{c; 1-\alpha\}$, $\vec{AL}\{1-(1-c)\beta; \beta\}$. Vektoriai $\vec{KC}$ ir $\vec{AL}$ yra kolinearūs, nes tiesės KC ir AL lygiagrečios. Kadangi kolinearių vektorių koordinatės proporcingos, tai $\frac{1-(1-c)\beta}{c} = \frac{\beta}{1-\alpha}$. Iš čia $c = \frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}{\alpha\beta}$.

Vektoriai $\vec{DL}\{1-(1-c)\beta; \beta-1\} = \vec{DL}\left\{\frac{1-\beta}{\alpha}; \beta-1\right\}$ ir $\vec{BK}\{1; -\alpha\}$

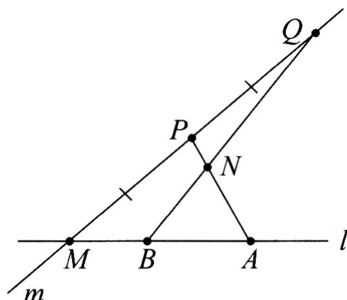
yra kolinearūs, nes $\dfrac{\frac{1-\beta}{\alpha}}{1}=\dfrac{\beta-1}{-\alpha}$. Taigi $DL \parallel BK$.

3 pavyzdys. Tiesėje l pažymėti taškai A ir B. Per tiesės l tašką M nubrėžta tiesė m. Joje taip parenkami taškai P ir Q taip, kad taškas P būtų atkarpos MQ vidurys. Nustatykime, kokią taškų aibę sudaro tiesių AP ir BQ susikirtimo taškai, kai P ir Q kinta.

Sprendimas. Afiniąją koordinačių sistemą pasirinkime taip, kad taškas M būtų jos pradžios taškas, o tiesės l bei m – abscisių ir ordinačių ašys (10 pav.). Tuomet taškų M, A, B ir P koordinatės yra: $M(0;0)$, $A(a;0)$, $B(b;0)$, $P(0;p)$. Kadangi taškas P yra atkarpos MQ vidurio taškas, tai Q koordinatės yra $Q(0;2p)$. Rašome tiesių AP ir BQ lygtis:

AP: $px+ay-ap=0$,

BQ: $2px+by-2pb=0$.



10 pav.

Šių tiesių susikirtimo taško N koordinates rasime iš sistemos

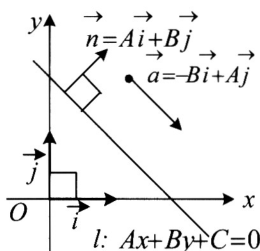
$$\begin{cases} px+ay-ap=0, \\ 2px+by-2pb=0. \end{cases}$$

Kai $\dfrac{p}{2p}=\dfrac{a}{b}$, t. y., kai $b=2a$, sistema sprendinių neturi; ieškomoji taškų aibė yra tuščia. Kai $b\neq 2a$, ieškomosios aibės taškų koordinatės $(x;y)$ su bet kuriuo $p\neq 0$ tenkina gautąją lygčių sistemą. Norėdami rasti ieškomosios taškų aibės lygtį, iš sistemos eliminuojame parametrą p. Tuo tikslu iš pirmosios lygties išreiškiame $p=\dfrac{ay}{a-x}$ ir, įrašę į antrąją lygtį, gauname $2ayx+by(a-x)-2aby=0$. Kadangi tiesių AP ir BQ susikirtimo taškas N nepriklauso tiesei l, tai $y\neq 0$. Pastarąją lygtį suprastinę iš y, gauname $(2a-b)x-ab=0$. Taigi taško N koordinatės

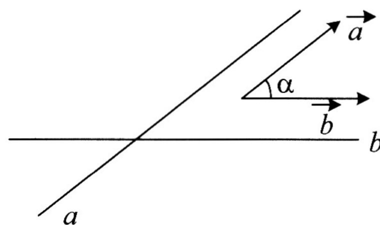
yra $N\left(\frac{ab}{2a-b};y\right)$.

Vadinasi, kai $b \neq 2a$ (t. y. kai A nėra atkarpos MB vidurio taškas), ieškomoji taškų aibė yra tiesė $x=\frac{ab}{2a-b}$, lygiagreti su tiese m; kai $b = 2a$, ieškomoji taškų aibė yra tuščia.

Sprendžiant metrinius uždavinius, t. y. tokius, kuriuose kalbama apie atstumus, kampų didumus, afiniosios koordinačių sistemos negelbsti. Tais atvejais taikoma stačiakampė Dekarto koordinačių sistema. Kaip žinome, šioje koordinačių sistemoje atstumas tarp taškų $A(x_1;y_1)$ ir $B(x_2;y_2)$ (atkarpos AB ilgis) skaičiuojamas pagal formulę $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Iš (1) ir (2) lygybių gauname, kad vektorius $\vec{a}=l\vec{i}+m\vec{j}=-B\vec{i}+A\vec{j}$ yra kolinearus su tiese l: $Ax+By+C=0$. Kadangi vektorius $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ yra statmenas vektoriui $\vec{a}$, tai jis statmenas tiesei l (11 pav.).



11 pav.



12 pav.

Kampas α tarp tiesių

$$a: A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ ir } b: A_2x+B_2y+C_2=0$$

yra lygus kampui tarp šioms tiesėms kolinearių vektorių $\vec{a}\{-B_1;A_1\}$ ir $\vec{b}\{-B_2;A_2\}$ (12 pav.), todėl

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (5)$$

Iš čia gauname, kad tiesės a ir b yra statmenos tada ir tik tada, kai

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (6)$$

Taigi tiesės, einančios per tašką $A(x_0; y_0)$ ir statmenos tiesei $Ax + By + C = 0$, lygtis yra

$$-B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0.$$

Sakykime, kad taškas $A(x_0; y_0)$ nepriklauso tiesei a: $Ax + By + C = 0$. Nuleiskime iš taško A statmenį tiesei a, kuris ją kerta taške $B(x_1; y_1)$ (13 pav.). Atkarpos AB ilgis d yra taško A atstumas iki tiesės a. Taigi

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Vektorius $\vec{AB} = (x_1 - x_0)\,\vec{i} + (y_1 - y_0)\,\vec{j}$ yra kolinearus su tiesei a statmenu vektoriumi $\vec{n} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j}$; todėl $\vec{AB} = t\,\vec{n}$. Iš čia gauname: $x_1 - x_0 = tA$, $y_1 - y_0 = tB$; todėl $d = |t|\sqrt{A^2 + B^2}$. Kita vertus, $x_1 = x_0 + tA$, $y_1 = y_0 + tB$, o taškas B yra tiesėje a; todėl teisinga lygybė

$$A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + C = 0.$$

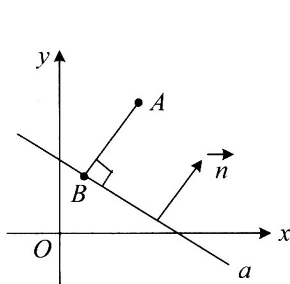
Iš čia

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

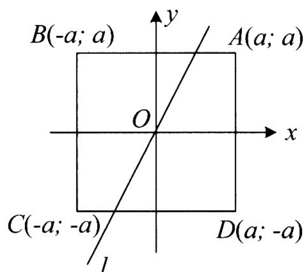
Taigi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (7)$$

yra taško $A(x_0; y_0)$ atstumas iki tiesės $Ax + By + C = 0$.



13 pav.



14 pav.

4 pavyzdys. Įrodykime, kad atstumų nuo duotojo kvadrato viršūnių iki tiesės l, einančios per kvadrato centrą, kvadratų suma nepriklauso nuo tiesės l pasirinkimo.

Sprendimas. Kadangi uždavinio sąlygoje kalbama apie metrinę geometriją (atstumai, kampų didumai), tai uždavinį spręsime naudodami stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą. Ją pasirinkime taip, kad pradžios taškas O sutaptų su kvadrato įstrižainių susikirtimo tašku, o koordinačių ašys būtų lygiagrečios su kvadrato kraštinėmis (14 pav.). Jei kvadrato kraštinės ilgį pažymėsime $2a$, tai šioje koordinačių sistemoje kvadrato viršūnių koordinatės yra: $A(a; a)$, $B(-a; a)$, $C(-a; -a)$, $D(a; -a)$. Tiesė l eina per koordinačių pradžią, todėl jos lygtis yra $Ax + By = 0$. Pagal (6) formulę randame atstumus d_A, d_B, d_C ir d_D nuo kvadrato viršūnių iki tiesės l:

$$d_A = \frac{|Aa + Ba|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{a\,|A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$d_B = \frac{|-Aa + Ba|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{a\,|A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$d_C = \frac{|-Aa - Ba|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{a\,|A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$d_D = \frac{|Aa - Ba|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{a\,|A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Vadinasi,

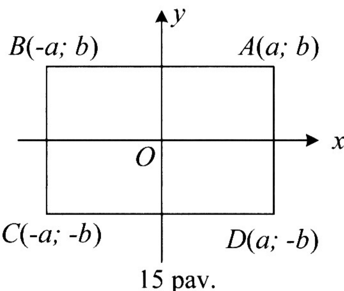
$$d_A^2+d_B^2+d_C^2+d_D^2=\frac{2a^2(A+B)^2+2a^2(A-B)^2}{A^2+B^2}=$$

$$=\frac{2a^2(A^2+2AB+B^2+A^2-2AB+B^2)}{A^2+B^2}=4a^2.$$

Taigi atstumų kvadratų suma yra vienoda visoms per kvadrato centrą einančioms tiesėms *l*.

5 pavyzdys. Duotas stačiakampis *ABCD*. Raskime aibę plokštumos taškų, kurių atstumų iki vienos įstrižainės galų suma lygi atstumų iki kitos įstrižainės galų sumai.

Sprendimas. Pasirinkime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą taip, kad jos pradžios taškas būtų stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas *O*, o koordinačių ašys būtų lygiagrečios su stačiakampio kraštinėmis (15 pav.). Jei $AB=2a$, $AD=2b$, tai stačiakampio viršūnių koordinatės yra $A(a;b)$, $B(-a;b)$, $C(-a;-b)$, $D(a;-b)$. Jei $X(x;y)$ – ieškomosios aibės taškas, tai pagal sąlygą $AX+CX=BX+DX$.



15 pav.

Kadangi $AX=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $CX=\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}$, $BX=\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}$, $DX=\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}$, tai

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}=$$

$$=\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}.$$

Pakėlę abi šios lygybės puses kvadratu ir suprastinę, gauname:

$$2\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)((x+a)^2+(y+b)^2)}=$$

$$=2\sqrt{((x-a)^2+(y+b)^2)((x+a)^2+(y-b)^2)}.$$

Iš čia (suprastinę iš 2 ir pakėlę abi puses kvadratu) gauname

$$(x-a)^2(y+b)^2+(y-b)^2(x+a)^2=$$

$$=(x+a)^2(y+b)^2+(x-a)^2(y-b)^2.$$

Šią lygtį pertvarkome:

$$(x-a)^2((y+b)^2-(y-b)^2)+(x+a)^2((y-b)^2-(y+b)^2)=0,$$

$$((y+b)^2-(y-b)^2)((x-a)^2-(x+a)^2)=0.$$

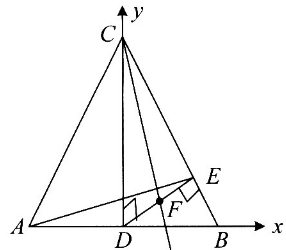
Atlikę veiksmus, gauname $4by\cdot(-4ax)=0$. Iš čia $x=0$ arba $y=0$. Atvirkščiai, jei taškas X yra Ox arba Oy ašyse, tai $XA=XD$, $XC=XB$ ir $AX+CX=BX+DX$. Taigi ieškomoji taškų aibė yra dvi statmenos tiesės, jungiančios priešingų stačiakampio kraštinių vidurio taškus.

6 pavyzdys. Tegu lygiašonio trikampio ABC pagrindo AB vidurio taškas yra D, o taškas F yra statmens DE, nubrėžto į kraštinę BC, vidurys. Įrodykime, kad tiesės AE ir CF statmenos.

Sprendimas. Stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą pasirinkime taip, kad jos pradžia būtų taškas D, abscisių ašis būtų tiesė AB, ordinačių – tiesė DC (16 pav.). Jei $AB=2a$, o $CD=c$, tai trikampio viršūnių koordinatės yra: $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(0;c)$. Tiesės BC lygtis yra $cx+ay-ac=0$; todėl jai statmenos tiesės DE, einančios per tašką $D(0;0)$ lygtis yra $-ax+cy=0$. Taško E koordinates rasime iš sistemos

$$\begin{cases} cx+ay-ac=0, \\ ax-cy=0. \end{cases}$$

Jos yra $E\left(\dfrac{ac^2}{a^2+c^2};\dfrac{a^2c}{a^2+c^2}\right)$.



16 pav.

Atkarpos DE vidurio taško F koordinatės yra $F\left(\dfrac{ac^2}{2(a^2+c^2)};\dfrac{a^2c}{2(a^2+c^2)}\right)$. Užrašome tiesių AE ir CF lygtis:

$$AE\colon\ acx-(2c^2+a^2)y+a^2c=0,$$

$$CF\colon\ (a^2+2c^2)x+acy-ac^2=0.$$

Patikrinę tiesių statmenumo sąlygą (6), įsitikiname, kad $AE\perp CF$.

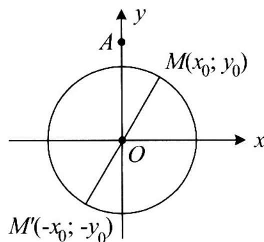
Apskritimas, kurio centras O, o spindulio ilgis R, yra aibė plokštumos taškų, nuo taško O nutolusių atstumu R. Jei stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje apskritimo centras yra $O(x_0; y_0)$, tai bet kurio šio apskritimo taško $M(x; y)$ koordinatės tenkina lygybę

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Tai apskritimo lygtis. Atskiru atveju, kai apskritimo centras sutampa su koordinačių pradžia, jo lygtis yra $x^2 + y^2 = R^2$.

7 pavyzdys. Plokštumoje duotas apskritimas ir jam nepriklausantis taškas A. Įrodykime, kad atstumų nuo taško A iki bet kurio šio apskritimo skersmens galų kvadratų suma yra vienoda visiems skersmenims.

Sprendimas. Stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą pasirinkime taip, kad jos pradžios taškas sutaptų su apskritimo centru (17 pav.), o ordinačių ašis eitų per tašką A. Jei apskritimo spindulys lygus R, tai jo lygtis yra $x^2 + y^2 = R^2$. Sakykime, kad $A(0; a)$ nėra apskritimo taškas. Jei $M(x_0; y_0)$ – bet kuris apskritimo taškas, tai per jį einančio skersmens MM' kitas galas M' yra simetriškas taškui M koordinačių pradžios O atžvilgiu; taigi jo koordinatės yra $M'(-x_0; -y_0)$. Kadangi taškai M ir M' yra apskritime, tai $x_0^2 + y_0^2 = R^2$. Apskaičiuokime atstumų MA ir $M'A$ kvadratų sumą:



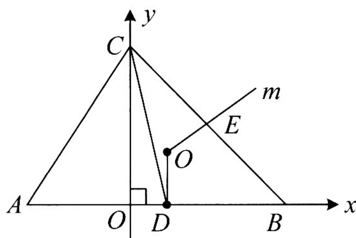
17 pav.

$$MA^2 + M'A^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 + x_0^2 + (-y_0 - a)^2 =$$
$$= x_0^2 + y_0^2 - 2ay_0 + a^2 + x_0^2 + y_0^2 + 2ay_0 + a^2 =$$
$$= 2(x_0^2 + y_0^2) + 2a^2 = 2R^2 + 2a^2.$$

Matome, kad gautoji suma nepriklauso nuo pasirinkto taško M koordinačių x_0 ir y_0; taigi ji yra vienoda visiems apskritimo taškams. Analogiškai šį teiginį galima įrodyti ir tuo atveju, kai taškas A nėra ordinačių ašyje.

8 pavyzdys. Duotas trikampis ABC. Įrodykime, kad aibė taškų M, tenkinančių lygybę $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$, yra tiesė, einanti per apibrėžto apie trikampį apskritimo centrą ir statmena pusiaukraštinei CD.

Sprendimas. Parinkime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą taip, kad trikampio viršūnės A ir B būtų abscisių ašyje, o viršūnė C – ordinačių ašyje (18 pav.). Sakykime, kad $A(a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(0; c)$. Jei $M(x; y)$ – uždavinio sąlygą tenkinantis plokštumos taškas, tai



18 pav.

$$AM^2 = (x-a)^2 + y^2,\ BM^2 = (x-b)^2 + y^2,\ CM^2 = x^2 + (y-c)^2$$

ir

$$(x-a)^2 + y^2 + (x-b)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(y-c)^2.$$

Atlikę veiksmus, gauname tokią lygtį:

$$2(a+b)x - 4cy + 2c^2 - a^2 - b^2 = 0.$$

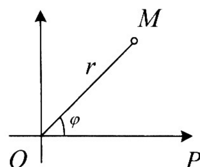
Tai tiesės (pažymėkime ją l) lygtis. Įsitikinsime, kad ši tiesė eina per apibrėžto apie trikampį apskritimo centrą O. Šis centras yra tiesėje $x = \frac{a+b}{2}$, einančioje per atkarpos AB vidurio tašką $D\left(\frac{a+b}{2}; 0\right)$ ir statmenoje tiesei AB. Taškas O yra ir tiesėje m, einančioje per atkarpos BC vidurio tašką $E\left(\frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ ir statmenoje tiesei BC: $cx + by - bc = 0$.

Taigi tiesės m lygtis yra $-b\left(x - \frac{b}{2}\right) + c\left(y - \frac{c}{2}\right) = 0$ arba $bx - cy + \frac{c^2 - b^2}{2} = 0$. Iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2}, \\ bx - cy + \dfrac{c^2 - b^2}{2} = 0 \end{cases}$$

randame taško O koordinates: $O\left(\frac{a+b}{2}; \frac{ab+c^2}{2c}\right)$. Įrašę taško O koordinates į tiesės l lygtį, įsitikiname, kad taškas O priklauso tiesei l. Rašome pusiaukraštinės CD lygtį $2cx+(a+b)y-c(a+b)=0$ ir įsitikiname, kad ši tiesė statmena tiesei l. Taigi ieškomoji taškų aibė yra tiesė l, einanti per apibrėžto apie trikampį apskritimo centrą ir statmena pusiaukraštinei CD.

Greta afiniųjų ir stačiakampių Dekarto koordinačių sistemų plačiai taikoma ir *plokštumos polinė koordinačių sistema.* Polinę koordinačių sistemą sudaro taškas O, vadinamas *poliumi*, ir spindulys OP, vadinamas *poline ašimi*. Šioje koordinačių sistemoje kiekvieno plokštumos taško M padėtis nusakoma jo atstumu $r = OM$ iki poliaus ir kampu $\varphi = \angle POM$ tarp spindulių OP ir OM (19 pav.). Aišku, kad $r \geq 0$, o $0 \leq \varphi < 2\pi$. Jei stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos pradžios taškas sutampa su poliumi O, o abscisių ašis – su poline ašimi, tai ryšys tarp taško M dekartinių koordinačių $(x; y)$ ir jo polinių koordinačių (r, φ) yra:



19 pav

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \qquad (8)$$

Akivaizdu, kad apskritimas, kurio centras O, o spindulys a, polinėse koordinatėse užrašomas lygtimi $r = a$. Apskritimas, kurio centras $C(a; 0)$, o spindulys lygus a, stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje užrašomas lygtimi $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, todėl iš (8) lygybių gauname, kad polinėse koordinatėse jo lygtis yra $r = 2a\cos\varphi$. Apskritimo su centru $(0; a)$ ir spinduliu a lygtis yra $r = 2a\sin\varphi$. Tiesė, einanti per polių ir sudaranti su poline ašimi kampą α, užrašoma lygtimi $\varphi = \alpha$. Tiesės, einančios per tašką $(a; 0)$ ir statmenos polinei ašiai, lygtis yra $r\cos\varphi = a$.

9 pavyzdys. Parašykime tiesės, einančios per taškus $A(r_1; \varphi_1)$ ir $B(r_2; \varphi_2)$, lygtį polinėse koordinatėse.

Sprendimas. Iš (8) lygybių randame taškų A ir B dekartines koordinates $A(r_1\cos\varphi_1; r_1\sin\varphi_1)$, $B(r_2\cos\varphi_2; r_2\sin\varphi_2)$.

Tuomet tiesės AB lygtis Dekarto koordinačių sistemoje yra

$$x(r_2\sin\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1) - y(r_2\cos\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1) -$$
$$- r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Įrašę vietoje x ir y jų išraiškas iš (8) lygybių ir suprastinę, gauname tiesės AB lygtį polinėje koordinačių sistemoje:

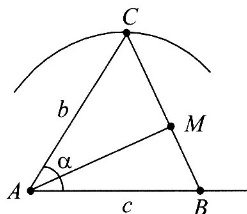
$$r(r_2\sin(\varphi_2 - \varphi) - r_1\sin(\varphi_1 - \varphi)) - r_1 r_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (9)$$

10 pavyzdys. Trikampio ABC viršūnės A ir B fiksuotos, kraštinės AB ilgis lygus c, o viršūnė C juda apskritimu, kurio centras – taškas A, o spindulys lygus b. Rasime, kokią liniją sudaro trikampio ABC pusiaukampinių, nubrėžtų iš taško A, susikirtimo su kraštine BC taškai.

Sprendimas. Nagrinėjame polinę koordinačių sistemą, kurios polius yra taškas A, o polinė ašis sutampa su spinduliu AB (20 pav.). Pažymėkime $\alpha = \angle CAB$; tuomet pasirinktoje koordinačių sistemoje $B(c; 0)$, $C(b; \alpha)$. Tiesės BC lygtis pagal (9) lygybę yra

$$br\sin(\alpha - \varphi) + cr\sin\varphi - bc\sin\alpha = 0.$$

Tiesė AM, dalijanti kampą CAB pusiau, užrašoma lygtimi $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$ (nes tiesė eina per polių ir su poline ašimi sudaro kampą $\dfrac{\alpha}{2}$).



20 pav.

Ieškomosios linijos taškų koordinatės $(r; \varphi)$ tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} br\sin(\alpha - \varphi) + cr\sin\varphi - bc\sin\alpha = 0, \\ \varphi = \dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Iš šios sistemos eliminuojame α ir gauname lygtį

$$\sin\varphi(br + cr - 2b\cos\varphi) = 0.$$

Kadangi taškas M nėra polinėje ašyje, tai $\varphi \neq 0$ ir todėl $\sin\varphi \neq 0$. Vadinasi, $r = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\varphi$. Taigi ieškomoji linija yra apskritimas, kurio centras $\left(\dfrac{bc}{b+c}; 0\right)$, o spindulio ilgis lygus $\dfrac{bc}{b+c}$.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AD ir BC vidurio taškai yra atitinkamai K ir L. Įrodykite, kad tiesės BK ir DL dalija įstrižainę AC į tris lygias dalis.

2. Trikampio ABC pusiaukraštinėje CD pažymėtas taškas P. Tiesės AP ir BC susikerta taške K, o tiesės BP ir AC – taške M. Įrodykite, kad tiesės MK ir AB yra lygiagrečios.

3. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje BC pažymėtas toks taškas K, kad $BK : KC = 2 : 3$, o kraštinėje CD toks taškas L, kad $DL : LC = 3 : 5$. Tiesės DK ir BL susikerta taške M. Raskite santykį $DM : MK$.

4. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti tokie taškai M ir N, kad $\dfrac{CM}{MA} = \dfrac{BN}{NC}$. Raskite visų atkarpų MN vidurio taškų aibę.

5. Kvadrato $ABCD$ kraštinės AD vidurio taškas E sujungtas atkarpa su įstrižainės AC tokiu tašku F, kad $AF : FC = 3$. Įrodykite, kad tiesės EF ir FB yra statmenos.

6. Iš stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo viršūnės C nuleista aukštinė CD, taškas M – jos vidurio taškas. Tiesė AM kerta statinį CB taške P. Įrodykite, kad $CP : PB = \cos^2 A$.

7. Apie kvadratą apibrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad bet kurio apskritimo taško atstumų iki kvadrato kraštinių kvadratų suma yra vienoda.

8. Duotas lygiagretainis *ABCD* ir taškas *M*. Įrodykite, kad reiškinio $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2$ didumas nepriklauso nuo taško *M* pasirinkimo.

Nurodymas. Pasirinkite Dekarto stačiakampę koordinačių sistemą taip, kad jos pradžia būtų taškas *A*, o viršūnė *B* – abscisių ašyje.

9. Duotas lygiakraštis trikampis *ABC*. Įrodykite, kad taškų, kurių atstumų iki viršūnių *A* ir *B* kvadratų suma lygi atstumo iki viršūnės *C* kvadratui, aibė yra apskritimas, kurio centras *O* yra simetriškas taškui *C* tiesės *AB* atžvilgiu, o spindulys lygus trikampio kraštinės ilgiui.

Nurodymas. Pasirinkite Dekarto stačiakampę koordinačių sistemą taip, kad viršūnės *A* ir *B* būtų *Ox* ašyje, o viršūnė *C* – *Oy* ašyje.

10. Duotas taškas *O* ir tiesė *l*, nutolusi nuo jo atstumu *a*. Iš taško *O* nubrėžtas spindulys kerta tiesę *l* taške *N*. Spindulyje *ON* pažymėtas taškas *M*, tenkinantis sąlygą $OM \cdot ON = b^2$ (čia *b* – duotasis skaičius). Kokią liniją nubrėžia taškai *M*, kai spindulys *ON* sukasi apie tašką *O*?

Nurodymas. Polinės koordinačių sistemos polių pasirinkite taške *O*, o polinę ašį nukreipkite statmenai tiesei *l*.



VI. PILNOSIOS TIKIMYBĖS FORMULĖ

Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas
(Vilniaus universitetas, Vilniaus pedagoginis universitetas)

Tikimybių teorija – matematikos šaka, tyrinėjanti atsitiktinių įvykių dėsningumus. Tačiau apie kokius dėsningumus galima kalbėti, jei nežinia, ar įvykis įvyks, t. y. jei įvykis yra atsitiktinis? Žinoma, nedrįstume teigti, kad vieną kartą metus monetą, ji atvirs herbu, tačiau visiškai tikėtina, kad šį bandymą pakartojus 1000 kartų, apie 500 kartų atvirs herbas. Pasitelkus tikimybių teoriją iš turimos informacijos (iš statistinių duomenų arba žinant kokių nors paprastų įvykių tikimybes) galima apskaičiuoti pakankamai sudėtingų įvykių tikimybes. Daugelis tokių tikimybių gali būti apskaičiuojamos naudojantis tikimybių teorijoje įrodomomis formulėmis. Viena iš jų – pilnosios tikimybės formulė, kuriai ir skirta ši tema. Čia taip pat panagrinėsime pilnosios tikimybės formulės taikymo galimybes.

Prisiminkime, kaip įvedama įvykio sąvoka, kaip apibrėžiama įvykio tikimybė bei sąlyginė tikimybė. Tik po to galėsime kalbėti apie pilnosios tikimybės formulę.

Su kiekvienu bandymu galima susieti jo baigčių aibę, t. y. parašyti visas galimas jo baigtis. Tegu *bandymo baigčių aibė* yra $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_n\}$. Tuomet kiekvienas nagrinėjamo bandymo įvykis A gali būti sutapdintas su *palankių* šiam įvykiui baigčių aibe. Pavyzdžiui, įvykis A, kad vieną kartą metus lošimo kauliuką atvirs ne daugiau kaip 3 akytės, gali būti sutapdintas su aibe $A = \{e_1; e_2; e_3\}$; baigtys e_1, e_2, e_3 yra palankios įvykiui A. Šitoks įvykio „matematizavimas“, paverčiantis įvykius aibėmis, leidžia jiems taikyti aibių teoriją, o tai sudaro galimybę vystytis pačiai tikimybių teorijai.

Patogus pavyzdys pademonstruoti baigčių aibę, įvykio sąvoką, veiksmus su įvykiais bei kai kurias formules yra lošimo kauliuko vieno metimo bandymas. Pastebėsime, kad tikimybių teorija ir užgimė nagrinėjant lošimus.

Jei galimybę atvirsti i akučių pažymėsime e_i, tai šio bandymo baigčių aibė tokia: $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$. Tuomet, pavyzdžiui, įvykis atvirsti lyginiam akučių skaičiui yra $L = \{e_2; e_4; e_6\}$, baigtys e_2, e_4, e_6 yra palankios įvykiui L.

Dar užrašykime šiuos įvykius: $N = \{e_1; e_3; e_5\}$ – jog atvirs nelyginis akučių skaičius; $E_1 = \{e_1\}$ – jog atvirs 1 akutė; $B = \{e_3; e_5\}$ – jog atvirs 3 arba 5 akutės, $C = \{e_1; e_2; e_3; e_4\}$ – jog atvirs ne daugiau kaip 4 akutės, $\overline{C} = \{e_5; e_6\}$ – *priešingąjį* įvykiui C – kad atvirs 5 arba 6 akutės. Iš šių įvykių naudodamiesi veiksmais galime konstruoti kitus įvykius. Pavyzdžiui, įvykių B ir C sąjunga yra įvykis $B \cup C = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5\}$, reiškiantis, kad įvyks bent vienas iš įvykių B ir C, t. y. atvirs arba 1, arba 2, arba 3, arba 4, arba 5 akutės. Įvykių B ir C sankirta yra įvykis $B \cap C = \{e_3\}$, reiškiantis, kad įvyks abu, B ir C, įvykiai (tik baigtis e_3 palanki abiem įvykiams), t. y. atvirs 3 akutės. Įvykių L ir N sankirtai $L \cap N$ palankių baigčių aibė yra tuščia: $L \cap N = \varnothing$. Šį įvykį vadinsime *negalimuoju*, o patys įvykiai L ir N vadinami *nesutaikomaisiais*. Nesutaikomi, pavyzdžiui, yra įvykiai L ir E_1, taip pat – L ir B, nes $L \cap E_1 = \varnothing$, $L \cap B = \varnothing$. Įvykis Ω vadinamas *būtinuoju įvykiu.*

Jeigu iš kelių įvykių aibės bet kurie du yra nesutaikomieji, o jų sąjunga yra būtinasis įvykis, tai tokia įvykių aibė vadinama *pilnąja įvykių grupe.* Pavyzdžiui, lošimo kauliuko metimo bandymo įvykiai L ir N sudaro pilnąją įvykių grupę, *elementariųjų įvykių* (tokių, kurie sudaryti tik iš vienos baigties) grupė $E_1 = \{e_1\}$, $E_2 = \{e_2\}$, $E_3 = \{e_3\}$, $E_4 = \{e_4\}$, $E_5 = \{e_5\}$, $E_6 = \{e_6\}$ yra pilnoji, įvykiai E_1, B ir L taip pat sudaro pilnąją įvykių grupę.

Lengviausia įvykio tikimybę apskaičiuoti, kai bandymo baigčių aibę sudaro *n vienodai galimų* baigčių. Tokiu atveju įvykių, susijusių su nagrinėjamu bandymu, tikimybės randamos pagal *klasikinį tikimybės apibrėžimą*: jei įvykį A sudaro k baigčių, tai $P(A) = \dfrac{k}{n}$. Pagal šį apibrėžimą nesunku apskaičiuoti visų minėtųjų su lošimo kauliuko metimu susijusių įvykių tikimybes:

$$P(\Omega) = \tfrac{6}{6} = 1,\ P(\varnothing) = \tfrac{0}{6} = 0,$$

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_6) = \tfrac{1}{6},$$

$$P(B) = \tfrac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(C)=\tfrac{4}{6}=\frac{2}{3},\ P(\overline{C})=\frac{1}{3},$$

$$P(N)=P(L)=\tfrac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$P(B\cup C)=\tfrac{5}{6},\ P(B\cap C)=\tfrac{1}{6}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad $P(C)+P(\overline{C})=1$. Ši formulė teisinga bet kuriems dviem priešingiems įvykiams.

Pravartu prisiminti įvykių sąjungos tikimybės skaičiavimo formulę

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B), \qquad (1)$$

kuri dviejų įvykių sąjungos tikimybę išreiškia sudedamųjų įvykių ir jų sankirtos tikimybėmis. Jeigu $A\cap B=\varnothing$, tai iš (1) gaunama nesutaikomųjų įvykių sąjungos tikimybė

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B), \qquad (2)$$

nes šiuo atveju $P(A\cap B)=0$.

Pagal (1) formulę apskaičiuokime „lošimo kauliuko įvykio“ $B\cup C$ tikimybę:

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

(šią tikimybę jau buvome gavę pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą). Kaip matome, naudojantis (1) formule nebereikia įvykio $B\cup C$ užrašyti jam palankių baigčių aibe, o užtenka žinoti įvykių B, C ir $B\cap C$ tikimybes, kurios gali būti nustatomos įvairiais būdais.

Apsistokime ties įvykių sankirtos tikimybės radimu. Ar žinant įvykių A ir B tikimybes galima apskaičiuoti įvykio $A\cap B$ tikimybę? Norėdami atsakyti į šį klausimą, turime įvesti sąlyginės tikimybės sąvoką. Vėl grįžkime prie lošimo kauliuko.

Andrius ir Saulius nutarė – jei metus vieną kartą kauliuką atvirs 3 arba 5 akutės (įvyks B), tai jie eis į sporto klubą; jei įvykis B neįvyks, tai neis. Tikimybė, kad berniukai eis į sporto klubą, lygi $P(B)=\frac{1}{3}$.

Apskaičiuokime įvykio B tikimybę laikydami, kad įvykis C įvyko, t. y. atvirto 1, 2, 3 arba 4 akutės. Šią tikimybę vadinsime įvykio B sąlygine tikimybe su sąlyga, kad C įvyko. Ją žymėsime $P_C(B)$. Kadangi C įvyko, tai dabartinio bandymo baigčių aibė yra įvykiui C palankių

baigčių aibė $\{e_1;e_2;e_3;e_4\}$, sudaryta iš 4 vienodai galimų baigčių, iš kurių tik viena e_3 palanki įvykiui *B*. Todėl $P_C(B)=\dfrac{1}{4}$. Taigi žinant, kad įvykis *C* įvyko, tikimybė nueiti į sporto klubą sumažėja. Įvykiai *B* ir *C* vadinami *priklausomaisiais įvykiais*, nes $P_C(B)\neq P(B)$. Atkreipkime dėmesį, kad gautąją tikimybę galima užrašyti ir kitaip: trupmenos $\dfrac{1}{4}$ skaitiklį ir vardiklį padalykime iš baigčių aibės elementų skaičiaus 6. Tuomet $P_C(B)=\dfrac{1}{4}=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}$. Panašiai $P_{\overline{C}}(B)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{P(B\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$. Taigi sąlyginę tikimybę išreiškėme „besąlyginėmis“ tikimybėmis.

Nagrinėdami įvykius *A* ir *B*, nebūtinai susijusius su lošimo kauliuko metimu, taip pat gautume, kad

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \text{ arba } P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \qquad (3)$$

Iš jų gauname priklausomų įvykių sankirtos tikimybės formules

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A). \qquad (4)$$

Kai $P_A(B)=P(B)$, $P_B(A)=P(A)$, t. y. kai įvykiai *A* ir *B* nepriklausomi, tai iš (4) turime:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B). \qquad (5)$$

Tikimybių teorijoje ši lygybė dažnai laikoma tiesiog įvykių *A* ir *B* *nepriklausomumo* apibrėžimu.

Tarp nagrinėtųjų įvykių, susijusių su lošimo kauliuko metimu, tikimybių galime įžvelgti tokį sąryšį:

$$P(B)=P(C)\cdot P_C(B)+P(\overline{C})\cdot P_{\overline{C}}(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

kuris yra pilnosios tikimybės formulės atskiras atvejis. Tik atkreipkime dėmesį, kad joje įvykiai *C* ir $\overline{C}$ sudaro pilnąją įvykių grupę, o įvykio *B* tikimybė gali būti laikoma pilnąja tikimybe (ji sudaryta iš dviejų dėmenų, atitinkančių galimybes įvykti *C* ir įvykti $\overline{C}$).

Kalbant bendriau, jei įvykis *A* gali įvykti tik su vienu iš įvykių $H_1,H_2,...,H_k$, kurie sudaro pilnąją įvykių grupę, tai

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+......+P(H_k)P_{H_k}(A). \qquad (6)$$

Ši formulė vadinama *pilnosios tikimybės formule*, įvykiai $H_1, H_2, ..., H_k$ – vadinami *hipotezėmis*.

Pilnosios tikimybės formulės įrodymui užtenka įvykį A užrašyti nesutaikomųjų įvykių, kurių kiekvienas yra įvykio A ir hipotezės H_i, $i = 1, ..., k$ sankirta, sąjunga:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup ... \cup (A \cap H_k)$$

Tuomet pritaikę (2) formulę, gausime, kad

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + ... + P(A \cap H_k).$$

Kiekvieną šios sumos tikimybę pagal (4) užrašę tikimybių sandauga, turėsime pilnosios tikimybės formulę (6).

Praktikoje kartais sprendžiamas atvirkščias uždavinys: žinoma, kad įvykis A įvyko, o reikia nustatyti, su kuria iš hipotezių H_i jis galėjo įvykti. Į šį klausimą atsako Bejeso (Thomas Bayes – anglų matematikas, 1702–1761) formulės, pagal kurias galima rasti sąlygines tikimybes $P_A(H_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, ir tuomet pagal jų didumą nustatyti, kuri iš hipotezių labiausiai tikėtina.

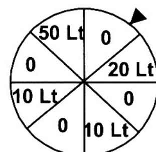
Bejeso formulės nesunkiai išvedamos iš (3) formulių:

$$P_A(H_i) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, ..., k; \qquad (7)$$

čia $P(A)$ – įvykio A pilnoji tikimybė, apskaičiuojama pagal (6) formulę.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Pasukus loterijos ratą, kuris padalytas į 8 lygius sektorius (1 pav.), galima išlošti 50 Lt, 20 Lt, 10 Lt arba nieko neišlošti.



1pav.

Apskaičiuokime šias tikimybes: 1) laimėti 10 litų (įvykis A); 2) laimėti kurią nors pinigų sumą (įvykis B); 3) nieko nelaimėti (įvykis C).

Pastaba. Laikykime, kad pasukus ratą, rodyklė negali apsistoti ties sektorių riba.

Sprendimas. Bandymo baigčių aibė sudaryta iš 8 vienodai galimų baigčių. Įvykiui A palankios 2 baigtys, įvykiui B – 4, įvykiui C – 4.

Todėl $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Ats.: $P(A) = 0{,}25$, $P(B) = P(C) = 0{,}5$.

2 pavyzdys. Iš karto metami du skirtingų spalvų lošimo kauliukai. Apskaičiuokime tikimybę, kad atvirtusių akučių skaičių sandauga bus nelyginė (įvykis A).

Sprendimas. Šio bandymo baigčių aibė sudaryta iš 36 vienodai galimų baigčių. Įvykiui A palankių baigčių yra 9 (tik nelyginių rezultatų sandauga yra nelyginis skaičius). Todėl $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

Ats.: $P(A)=0{,}25$.

3 pavyzdys (literatūroje vadinamas suolų paradoksu). Kambaryje – trys dviviečiai suolai. Du žmonės įeina į kambarį ir atsitiktinai atsisėda į bet kurią iš šešių vietų. Apskaičiuokime tikimybę, kad jie abu atsisės ant vieno suolo (įvykis A).

Sprendimas. (Kodėl šis uždavinys vadinamas paradoksu, paaiškės netrukus.) Samprotaukime taip. Pirmasis įėjęs į kambarį gali atsisėsti ant bet kurio iš trijų suolų, taigi jis turi 3 pasirinkimo galimybes. Tą patį galima teigti ir apie antrąjį žmogų – jis taip pat gali pasirinkti bet kurį iš trijų suolų. Jeigu šias devynias baigtis laikytume vienodai galimomis, o tris iš jų – palankiomis įvykiui A, tai pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą gautume $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Galima samprotauti ir kitaip. Pirmasis įėjęs į kambarį gali atsisėsti bet kurioje iš 6 vietų, o antrasis – bet kurioje iš likusių 5 vietų. Taigi galimų baigčių (vietų užėmimo variantų) aibė sudaryta iš $6\cdot 5=30$ vienodai galimų baigčių. Iš jų 6 baigtys palankios įvykiui A, nes jie dviem būdais gali atsisėsti ant pirmojo suolo, dviem būdais – ant antrojo ir dviem – ant trečiojo. Taigi įvykio A tikimybė lygi: $P(A)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

Kuris atsakymas teisingas? Juk jis turėtų nepriklausyti nuo samprotavimo būdo.

Kritikos nusipelno pirmasis samprotavimas – pasirinktos baigtys iš tikrųjų nėra vienodai galimos, todėl ir atsakymas $\frac{1}{3}$ yra neteisingas. Pavyzdžiui, baigtis, kad ir pirmasis, ir antrasis žmogus atsisės ant pirmo suolo, ir baigtis, kad pirmasis atsisės ant pirmo suolo, o antrasis – ant antro, nėra vienodai galimos. Samprotaujant antruoju būdu visos baigtys

yra vienodai galimos. Vadinasi, paradokso esmė slypi neteisingame klasikinio tikimybės apibrėžimo taikyme.

Šį uždavinį galima spręsti ir taikant pilnosios tikimybės formulę. Pažymėkime H_1 - įvykį, kad pirmasis žmogus atsisės ant pirmojo suolo, H_2 – įvykį, kad pirmasis žmogus atsisės ant antrojo suolo, H_3 – kad ant trečiojo. Šie įvykiai sudaro pilnąją įvykių grupę ir

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Sąlyginės tikimybės yra lygios – $P_{H_1}(A) = P_{H_2}(A) = P_{H_3}(A) = \frac{1}{5}$.

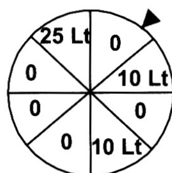
Pritaikę pilnosios tikimybės formulę, gauname

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Ats.: $P(A) = 0{,}2$.

4 pavyzdys. Loterija buvo suorganizuota taip. Žaidėjas ateina prie urnos, kurioje 15 mėlynų ir 10 raudonų rutuliukų. Jeigu jis ištraukia mėlyną rutuliuką, tai eina sukti mėlyno lošimo rato (vieną kartą), o jeigu raudoną, tai vieną kartą suka raudoną lošimo ratą.

Abu lošimo ratai padalyti į 8 vienodo dydžio sektorius. Mėlynasis lošimo ratas pavaizduotas 1 paveiksle, o raudonasis – 2 paveiksle. Apskaičiuokime tikimybę: a) kad žaidėjas išloš bent 10 litų (įvykis A); b) kad žaidėjas išloš 10 litų (įvykis B).



2 pav.

Sprendimas. Tegu H_1 – įvykis, kad žaidėjas ištrauks mėlyną rutuliuką, H_2 – kad raudoną. Šie įvykiai sudaro pilnąją įvykių grupę, o jų tikimybės tokios:

$$P(H_1) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \quad P(H_2) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Tikimybė išlošti bent 10 Lt prie mėlynojo lošimo rato lygi $P_{H_1}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, prie raudonojo – $P_{H_2}(A) = \frac{3}{8}$. Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{20}.$$

Apskaičiuokime tikimybes išlošti 10 Lt prie mėlynojo ir raudonojo lošimų ratų: $P_{H_1}(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P_{H_2}(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Tuomet įvykio B pilnoji tikimybė lygi:

$$P(B)=P(H_1)P_{H_1}(B)+P(H_2)P_{H_2}(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ats.: a) $P(A)=\frac{9}{20}$; b) $P(B)=\frac{1}{4}$.

5 pavyzdys. 4 pavyzdžio loterijoje Andrius išlošė bent 10 litų (įvykis A). Draugai jo paklausė „prie kurio rato tu lošei?“ Tačiau jis paslapties neišdavė. Apskaičiuokime tikimybę $P_A(H_1)$ – kad Andrius lošė prie mėlynojo rato, ir tikimybę $P_A(H_2)$ – kad jis lošė prie raudonojo rato, ir nustatykime, kuris iš šių įvykių labiau tikėtinas.

Sprendimas. Pagal Bejeso formules gauname:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{9}{20}}=\frac{2}{3},$$

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{9}{20}}=\frac{1}{3}.$$

Kaip matome, labiau tikėtina, kad Andrius išlošė prie mėlynojo rato.

Ats.: $P_A(H_1)=\frac{2}{3}$, $P_A(H_2)=\frac{1}{3}$; labiau tikėtinas lošimas prie mėlynojo rato.

6 pavyzdys. Iš meteorologinių stebėjimų Sildavijos šalyje padarytos tokios išvados: jei šiandien giedra (įvykis G), tai rytoj bus giedra su tikimybe $\frac{5}{6}$; jei šiandien lyja (įvykis L), tai rytoj lis su

tikimybe $\frac{2}{3}$. Šiandien sekmadienis – giedra diena. Apskaičiuokime tikimybę, kad antradienį bus giedra.

Sprendimas. Meteorologines išvadas galima užrašyti taikant sąlygines tikimybes: jei šiandien giedra, tai tikimybė, kad rytoj bus giedra, lygi $P_G(G)=\frac{5}{6}$; jei šiandien lyja, tai tikimybė, kad lis rytoj, yra $P_L(L)=\frac{2}{3}$. Tuomet (pagal priešingo įvykio tikimybės formulę) $P_G(L)=\frac{1}{6}$ ir $P_L(G)=\frac{1}{3}$.

Tikimybę, kad antradienis bus giedras, apskaičiuokime pagal pilnosios tikimybės formulę. Pažymėję G_3 įvykį, kad antradienį bus giedra, gausime:

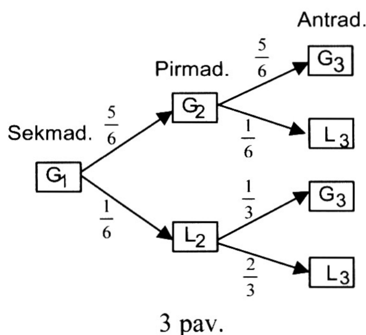
$$P(G_3)=P(G_2)\cdot P_{G_2}(G_3)+P(L_2)\cdot P_{L_2}(G_3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4};$$

čia G_2 (pirmadienį giedra) ir L_2 (pirmadienį lyja) yra pilnoji įvykių grupė, $P(G_2)=P_{G_1}(G_2)=\frac{5}{6}$, $P(L_2)=P_{G_1}(L_2)=\frac{1}{6}$ (G_1 – įvykis, kad sekmadienį giedra).

Pastaba. Sprendžiant uždavinį patogu naudotis tikimybių medžiu (3 pav.). Pagal jį ieškomąją tikimybę galima apskaičiuoti iš karto:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}.$$

Ats.: $\frac{3}{4}$.



3 pav.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Ant stalo padėtos 100 kortelių, sunumeruotos skaičiais 00, 01, 02, ..., 98, 99. Atsitiktinai traukiama viena kortelė. Tegu įvykis A – ištrauktosios kortelės numerio pirmasis skaitmuo mažesnis už 3, įvykis B – ištrauktosios kortelės numerio antrasis skaitmuo mažesnis už 4. Apskaičiuokite įvykio $P(A \cup \overline{B})$ tikimybę.

2. Verslininkas, norėdamas sumažinti riziką, savo kapitalą investavo į dvi visiškai viena nuo kitos nepriklausomas įmones. Tikimybė, kad jis gaus pelną iš pirmosios įmonės, lygi $0{,}7$, o tikimybė, kad jis gaus pelną iš antrosios įmonės, yra $0{,}8$. Apskaičiuokite tikimybę kad:

a) verslininkas gaus pelną bent iš vienos įmonės;
b) verslininkas gaus pelną tik iš vienos įmonės.

3. Iš meteorologinių stebėjimų Lietsavijos šalyje padarytos išvados: jei šiandien giedra, tai rytoj bus giedra su tikimybe $\frac{3}{4}$; jei šiandien lyja, tai rytoj lis su tikimybe $\frac{4}{5}$. Šiandien pirmadienis – lietinga diena. Apskaičiuokite tikimybę, kad ketvirtadienį bus giedra.

4. Lietsavijos mieste Savijoje yra 40 % šviesiaplaukių, 50 % mėlynakių ir 35 % šviesiaplaukių mėlynakių gyventojų. Turistas, tik atvykęs į šį miestą, atsitiktinai sutiko jo gyventoją ir pastebėjo, kad jis šviesiaplaukis, tačiau akių spalvos nespėjo nustatyti. Kokia tikimybė, kad šis gyventojas mėlynakis?

5. Mokytojas pranešė, kad po savaitės vyks žinių patikrinimas ir padiktavo 20 klausimų, į kuriuos mokiniai turi pasirengti atsakyti. Dar mokytojas informavo apie patikrinimo tvarką: kiekvienas klausimas bus parašytas ant atskiro lapelio – bilieto; mokiniai iš eilės pagal sąrašą atsitiktinai trauks po 1 klausimą.

Savaitė praėjo greitai – Romas, kuris sąraše trečias, spėjo pasirengti atsakyti tik į 12 klausimų, ir pagalvojo – kaip būtų gerai,

kad aš sąraše būčiau pirmas, manydamas, jog tuomet tikimybė, kad jam paklius vienas iš žinomų klausimų, būtų didesnė, negu kad traukiant bilietą trečiam.

Suraskite tikimybę, kad Romas (traukdamas bilietą trečias) ištrauks jam žinomą klausimą. Kokia tikimybė Romui ištraukti jam žinomą klausimą, jeigu bilietą jis trauktų pirmas? Palyginkite šias tikimybes.

6. Trijose dėžėse yra po 20 vienodų detalių. Pirmoje dėžėje visos detalės yra standartinės, antroje dėžėje – 15 standartinių detalių, o trečioje – 10 standartinių detalių. Iš atsitiktinai pasirinktos dėžės atsitiktinai išimta standartinė detalė. Ji grąžinama į tą pačią dėžę. Po to iš tos pačios dėžės vėl atsitiktinai išimta detalė taip pat standartinė. Raskite tikimybę, kad detalės buvo išimtos iš trečios dėžės.

7. Dvi dėžės pridėtos vienodo dydžio rutuliukų: pirmojoje – 3 balti ir 2 juodi, antrojoje – 4 balti ir 4 juodi rutuliukai. Iš pirmosios dėžės atsitiktinai paimti 2 rutuliukai perdėti į antrąją dėžę, o po to iš antrosios dėžės atsitiktinai ištrauktas vienas rutuliukas. Apskaičiuokite tikimybę, kad jis – baltas?

8. Įmonėje 160 darbuotojų, iš kurių 120 moterų. Keturiasdešimties moterų amžius neviršija 25 metų. Apklausai atsitiktinai parenkamas vienas darbuotojas. Tikimybė apklausti darbuotoją, kurio amžius neviršija 25 metų, žinant, kad jis vyras, lygi 0,125. Apskaičiuokite tikimybę apklausti vyrą, kurio amžius neviršija 25 metų.

9. Tikimybė, kad krepšininkas pataikys baudos metimą, lygi 0,9. Tačiau antrojo baudos metimo sėkmė priklauso nuo pirmojo metimo rezultato: jei pirmąjį pataiko, tai antrojo metimo pataikymo tikimybė lygi 0,8; jei pirmojo nepataiko, tai antrasis metimas tikslus su tikimybe 0,75. Apskaičiuokite tikimybę, kad krepšininkas iš dviejų baudos metimų pataikys vieną.

10. Pro degalinę važiuoja lengvieji automobiliai ir sunkvežimiai. Sunkvežimiai sudaro 60 % visų pravažiuojančių automobilių.

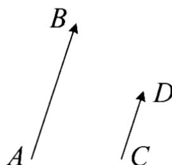
Tikimybė, kad prisipilti degalų užvažiuos lengvasis automobilis, lygi 0,2, kad sunkvežimis – 0,1. Prie degalinės privažiavo automobilis. Kokia tikimybė, kad tai sunkvežimis?



VII. VEKTORIAI ERDVĖJE

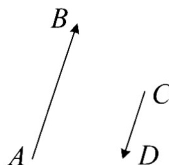
Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Atlikdami šią užduotį, susipažinsite su erdvės vektoriais, jų veiksmais, išmoksite taikyti vektorinį metodą geometriniams uždaviniams spręsti. Kaip žinome iš mokyklinių vadovėlių, *vektoriumi* $\vec{a} = \vec{AB}$ yra vadinama orientuota atkarpa (arba kryptinė atkarpa) *AB*, t. y. atkarpa su nurodytais pradžios ir galo taškais. Vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ yra vadinami *lygiais*, jei atkarpų *AB* ir *CD* ilgiai vienodi, o spinduliai *AB* ir *CD* yra vienakrypčiai. Vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ yra vadinami a) *vienakrypčiais* ($\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$), jei spinduliai *AB* ir *CD* yra tos pačios krypties (1a pav.); b) *priešpriešiais* ($\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$), jei spinduliai *AB* ir *CD* yra priešingų krypčių (1b pav.); c) *kolineariais* ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$), jei tiesės *AB* ir *CD* lygiagrečios.



$\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$

1a pav.

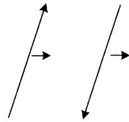


$\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$

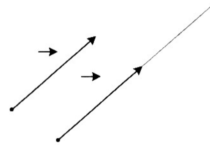
1b pav.

Aišku, kad kolinearūs vektoriai yra arba vienakrypčiai, arba priešpriešiai. Trys vektoriai $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ ir $\vec{EF}$ yra vadinami *komplanariais*, jei egzistuoja plokštuma, su kuria yra lygiagrečios tiesės *AB*, *CD*, *EF*. *Nuliniu vektoriumi* $\vec{0}$ vadinamas toks vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa. Nulinis vektorius yra kolinearus su bet kuriuo erdvės vektoriumi ir komplanarus su bet kuriais dviem erdvės

vektoriais. Vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *moduliu* (*ilgiu*) vadinamas atkarpos AB ilgis; vektoriaus $\vec{a}$ modulis žymimas $|\vec{a}|$. Nulinio vektoriaus modulis lygus nuliui. Vektoriai, kurių moduliai lygūs, o kryptys priešingos, yra vadinami *priešingaisiais vektoriais*. Vektoriui $\vec{a}$ priešingasis vektorius žymimas $-\vec{a}$. Aišku, kad $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (2 pav.).

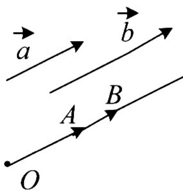


2 pav.

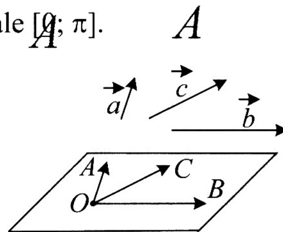


3 pav.

Sakykime, kad $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – erdvės vektorius, O – bet kuris erdvės taškas. Nubrėžkime spindulį OM, vienakryptį su spinduliu AB ir jame raskime tašką C, kad atkarpos AB ir OC būtų vienodo ilgio (3 pav.). Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra lygūs. Sakoma, kad vektorius $\vec{a}$ yra atidedamas nuo taško O. Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – kolinearūs vektoriai, tai, atidėti nuo vieno taško, jie yra vienoje tiesėje (4a pav.), o jei $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – komplanarūs vektoriai, tai, atidėti nuo vieno taško, jie yra vienoje plokštumoje (4b pav.). Jei du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atidėti nuo vieno taško O ($\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$), tai kampas AOB yra vadinamas *kampu tarp vektorių* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$; šis kampas yra intervale $[0; \pi]$.



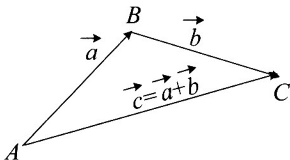
4a pav.



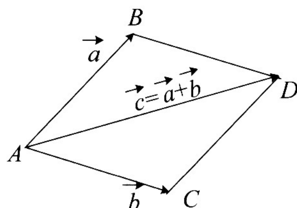
4b pav.

Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0°, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – tai 180°.

2. Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du erdvės vektoriai. Pasirinkime tašką A ir atidėkime nuo jo vektorių $\vec{a} = \vec{AB}$, o nuo taško B vektorių $\vec{b} = \vec{BC}$ (5 pav.). Vektorius $\vec{c} = \vec{AC}$ yra vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Taigi $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ (*vektorių sudėties trikampio taisyklė*).



5 pav.



6 pav.

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs, tai atidėję nuo taško A vektorius $\vec{a} = \vec{AB}$ ir $\vec{b} = \vec{AC}$, nubrėžkime lygiagretainį $ABDC$ (6 pav.). Tuomet $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ (*vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė*).

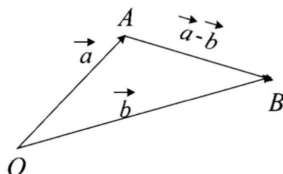
Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

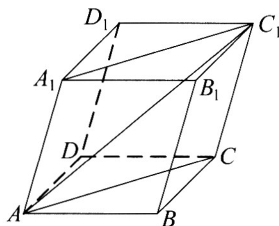
Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skirtumu* vadinamas toks vektorius $\vec{x}$, su kuriuo galioja lygybė $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$; žymime $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Akivaizdu, kad

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (7 pav.).

Jei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, tai $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.



7 pav.



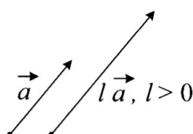
8 pav.

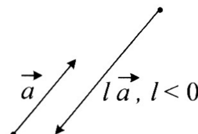
8 paveiksle pavaizduotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Kadangi $ABCD$ ir ACC_1A_1 yra lygiagretainiai, tai $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$. Taigi $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ (*trijų vektorių sudėties gretasienio taisyklė*).

Skaičiaus l ir vektoriaus $\vec{a}$ *sandauga* vadinamas vektorius $\vec{b}$, pasižymintis savybėmis:

1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, jei $l > 0$; $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, jei $l < 0$;

2) $|\vec{b}| = |l| \cdot |\vec{a}|$ (9 pav.).





9 pav.

Skaičiaus 0 ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga yra nulinis vektorius. Skaičiaus l ir vektoriaus $\vec{a}$ sandaugą žymima $l \cdot \vec{a}$ (taškas dažnai yra praleidžiamas).

Vektoriaus daugybos iš skaičiaus **savybės**:

1) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$,

2) $(lk)\cdot\vec{a}=l\cdot(k\vec{a})$,

3) $(l+k)\cdot\vec{a}=l\cdot\vec{a}+k\cdot\vec{a}$,

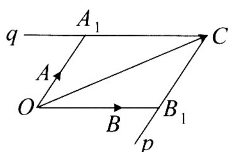
4) $l\cdot(\vec{a}+\vec{b})=l\cdot\vec{a}+l\cdot\vec{b}$.

Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs tada ir tik tada, kai yra toks skaičius l, kad $\vec{b}=l\cdot\vec{a}$. Jei $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, tai $l=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, jei $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, tai $l=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

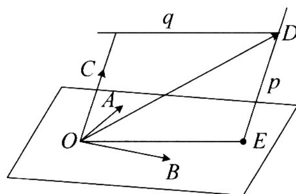
1 teorema. *Sakykime, kad $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra trys komplanarūs vektoriai, o vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs. Tuomet vektorius $\vec{c}$ vienareikšmiškai išreiškiamas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, t. y. egzistuoja vienintelė skaičių l ir m pora, kad $\vec{c}=l\vec{a}+m\vec{b}$.*

Įrodymas. Nuo taško O atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Taškai O, A, B, C yra vienoje plokštumoje. Per tašką C nubrėžkime tieses $p\parallel OA$ ir $q\parallel OB$ (10 pav.). Sakykime, kad tiesės p ir OB susikerta taške B_1, o tiesės q ir OA – taške A_1. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{OA_1}$ ir $\overrightarrow{OA}$ kolinearūs, tai egzistuoja skaičius l, kad $\overrightarrow{OA_1}=l\cdot\overrightarrow{OA}=l\cdot\vec{a}$. Vektoriai $\overrightarrow{OB_1}$ ir $\overrightarrow{OB}$ taip pat kolinearūs, todėl egzistuoja skaičius m, kad $\overrightarrow{OB_1}=m\cdot\overrightarrow{OB}=m\cdot\vec{b}$. Kadangi $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$, tai $\vec{c}=l\vec{a}+m\vec{b}$.

Jei l' ($l' \neq l$) ir m' ($m' \neq m$) yra kiti skaičiai, su kuriais $\vec{c} = l'\vec{a} + m'\vec{b}$, tai atėmę vieną lygybę iš kitos, turime $(l-l')\vec{a} + (m-m')\vec{b} = \vec{0}$. Iš čia $\vec{a} = -\dfrac{m-m'}{l-l'}\vec{b}$, taigi $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Ši išvada prieštarauja teoremos sąlygai. Vadinasi, $l' = l$, $m' = m$.



10 pav.



11 pav.

2 teorema. *Sakykime, kad* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ *– keturi erdvės vektoriai, o vektoriai* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *– nekomplanarūs. Tada vektorius* $\vec{d}$ *vieninteliu būdu išreiškiamas vektoriais* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, *t. y. egzistuoja vienintelis skaičių l, m ir n rinkinys, su kuriuo galioja lygybė* $\vec{d} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$.

Įrodymas. Atidėkime nuo taško O vektorius $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$, $\vec{d} = \vec{OD}$ (11 pav.). Per tašką D nubrėžkime tiesę p, lygiagrečią su tiese OC. Ji kerta plokštumą, einančią per taškus O, A ir B, taške E. Pagal 1 teoremą egzistuoja vienintelė skaičių l ir m pora, kad $\vec{OE} = l\vec{a} + m\vec{b}$. Per tašką D nubrėžkime tiesę $q \parallel OE$, kuri kerta tiesę OC taške C_1 (išsiaiškinkite, kodėl tiesės q ir OC susikerta). Kadangi $\vec{OC} \parallel \vec{OC_1}$, tai egzistuoja vienintelis skaičius n, su kuriuo $\vec{OC_1} = n \cdot \vec{OC} = n \cdot \vec{c}$. Keturkampis $OEDC_1$ yra lygiagretainis, todėl $\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{OC_1}$. Taigi egzistuoja vienintelis skaičių trejetas l, m ir n, su

kuriuo galioja lygybė $\vec{d} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$.

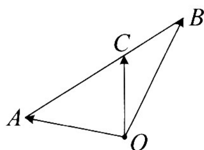
3 teorema. *Sakykime, kad atkarpoje AB yra toks taškas C, kad* $AC : CB = \alpha : \beta$. *Tuomet bet kuriam erdvės taškui O yra teisinga lygybė*

$$\vec{OC} = \frac{\beta\vec{OA} + \alpha\vec{OB}}{\alpha + \beta}.$$

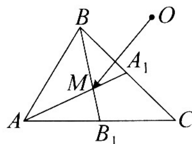
Įrodymas. Kadangi $AC : CB = \alpha : \beta$ (12 pav.), tai $\vec{AC} = \frac{\alpha}{\beta}\vec{CB}$.

Jei O – bet kuris erdvės taškas, tai $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OC}$. Tada $\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{\alpha}{\beta}(\vec{OB} - \vec{OC})$. $(\beta + \alpha)\vec{OC} = \quad = \beta\vec{OA} + \alpha\vec{OB}$. Taigi

$$\vec{OC} = \frac{\beta\vec{OA} + \alpha\vec{OB}}{\alpha + \beta}$$



12 pav.



13 pav.

Sakykime, kad taške M susikerta trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1, o O yra bet kuris erdvės taškas (13 pav.). Kadangi $BM : MB_1 = 2 : 1$, tai bet kuriam erdvės taškui M teisinga lygybė $\vec{OM} = \frac{\vec{OB} + 2\vec{OB_1}}{3}$. Kadangi B_1 – atkarpos AC vidurio taškas, tai $\vec{OB_1} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$. Iš šių dviejų lygybių gauname, kad $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$. Atvirkščiai, jei taškui M teisinga gautoji lygybė

su bet kuriuo erdvės tašku O, tai M yra trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Tikrai, kai taškas O sutampa su tašku B, tai $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$; todėl $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. Jei taškas B_1 yra atkarpos AC vidurio taškas, tai $\overrightarrow{BB_1} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$. Taigi vektoriai $\overrightarrow{BM}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$ yra kolinearūs, todėl taškas M yra pusiaukraštinėje BB_1. Analogiškai įrodoma, kad taškas M yra ir kitose pusiaukraštinėse.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė AC_1 kerta plokštumą, einančią per taškus A_1, B ir D, trikampio A_1BD pusiaukraštinių susikirtimo taške M. (14 pav.).

Sprendimas. Pagal 3 teoremą užtenka įsitikinti, kad

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

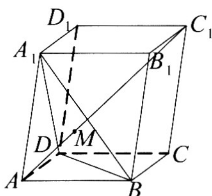
Norėdami gauti šią lygybę, vektorių $\overrightarrow{AM}$ išreikškime nekomplanariais vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AA_1}$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AC_1}$ kolinearūs, tai egzistuoja toks skaičius x, kad $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC_1} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$ (pagal gretasienio taisyklę). Kita vertus, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M}$. Kadangi taškas M yra plokštumoje, einančioje per taškus A_1, B ir D, tai tos plokštumos vektorių $\overrightarrow{A_1M}$ išreikškime (remdamiesi 1 teorema) nekolineariais vektoriais $\overrightarrow{A_1B}$ ir $\overrightarrow{A_1D}$: $\overrightarrow{A_1M} = y\overrightarrow{A_1B} + z\overrightarrow{A_1D}$. Bet $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$, todėl

$$\overrightarrow{A_1M} = y(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}) + z(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}) =$$
$$= y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AD} + (-y - z)\overrightarrow{AA_1}$$

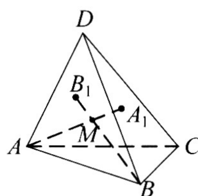
ir

$$\vec{AM} = \vec{AA_1} + \vec{A_1M} = y\,\vec{AB} + z\,\vec{AD} + (1-y-z)\,\vec{AA_1}.$$

Pagal 2 teoremą abi vektoriaus $\vec{AM}$ išraiškos turi sutapti, todėl teisingos lygybės $x = y$, $x = z$, $x = 1 - y - z$. Iš čia gauname, kad $x = y = z = \frac{1}{3}$, t. y. $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1})$.



14 pav.



15 pav.

2 pavyzdys. Sakykime, kad taškai A_1, B_1, C_1 ir D_1 yra trikampės piramidės *ABCD* sienų *BCD*, *ACD*, *ABD* ir *ABC* pusiaukraštinių susikirtimo taškai. Įrodysime, kad atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 ir DD_1 susikerta viename taške *M* ir

$$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = DM : MD_1 = 3:1.$$

Sprendimas. Visų pirma įsitikinkime, kad atkarpos AA_1 ir BB_1 susikerta (15 pav.). Taškai A_1 ir B_1 yra trikampių *BCD* ir *ACD* pusiaukraštinių susikirtimo taškai, todėl

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}),$$

$$\vec{BB_1} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD}) = \frac{1}{3}(-\vec{AB} + \vec{AC} - \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AB}) =$$

$$= -\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD}.$$

Kadangi

$$\vec{A_1B_1} = \vec{A_1A} + \vec{AB} + \vec{BB_1} = -\vec{AA_1} + \vec{AB} + \vec{BB_1} =$$

$$= -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$

tai tiesės A_1B_1 ir AB yra lygiagrečios, t. y. taškai A, B, A_1 ir B_1 yra vienoje plokštumoje. Taigi nelygiagrečios vienos plokštumos tiesės AA_1 ir BB_1 susikerta taške M. Sakykime, kad $AM : MA_1 = x$, $BM : MB_1 = y$. Tuomet $\overrightarrow{AM} = \frac{x}{1+x}\overrightarrow{AA_1} = \frac{x}{3(1+x)}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Kita vertus, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB_1}}{1+y}$. Kadangi

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

tai $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \frac{y}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{y}{3}\overrightarrow{AD}}{1+y}$. Gavome dvi vektoriaus $\overrightarrow{AM}$ išraiškas trimis nekomplanariais vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Pagal 2 teoremą jos turi sutapti, todėl

$$\frac{x}{3(1+x)} = \frac{1}{1+y}, \quad \frac{x}{3(1+x)} = \frac{y}{3(1+y)}, \quad \frac{x}{3(1+x)} = \frac{y}{3(1+y)}.$$

Iš čia:

$$\frac{1}{1+y} = \frac{y}{3(1+y)} \Rightarrow y = 3.$$

Tuomet

$$\frac{x}{3(1+x)} = \frac{1}{1+3} \Rightarrow x = 3.$$

Gavome, kad $AM : MA_1 = BM : MB_1 = 3:1$. Analogiškai įrodoma (įsitikinkite tuo patys), kad atkarpos AA_1 ir CC_1 susikerta kuriame nors taške N ir $AN : NA_1 = CN : NC_1 = 3:1$, o atkarpos AA_1 ir DD_1 susikerta kuriame nors taške P ir $AP : PA_1 = DP : PD_1 = 3:1$. Bet atkarpoje AA_1 yra tik vienas taškas M toks, kad $AM : MA_1 = 3:1$, todėl taškai N ir P sutampa su tašku M. Taigi atkarpos AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 susikerta

viename taške M. Šis taškas yra vadinamas trikampės piramidės $ABCD$ *sunkio centru* .

3 pavyzdys. Trikampės piramidės $ABCD$ sienos ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas yra M, taškas L yra briaunoje CD ir $CL : LD = 2 : 5$. Plokštuma, einanti per taškus A, B ir L, kerta atkarpą DM taške N. Apskaičiuokime santykį $DN : NM$ (16 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad $DN : NM = x$. Tuomet

$$\vec{DN} = \frac{x}{x+1}\vec{DM} = \frac{x}{3(x+1)}(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}).$$

Kita vertus, $\vec{DN} = \vec{DA}+\vec{AN}$. Vektorius $\vec{DA}$ ir $\vec{AN}$ išreikškime vektoriais $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ ir $\vec{DC}$. Kadangi taškai A, L, B ir N yra vienoje plokštumoje, o vektoriai $\vec{AL}$ ir $\vec{AB}$ nekolinearūs, tai pagal 1 teoremą $\vec{AN} = y\vec{AL}+z\vec{AB}$. Pagal uždavinio sąlygą

$$\vec{AL} = \frac{5\vec{AC}+2\vec{AD}}{2+5} = \frac{1}{7}(5\vec{AC}+2\vec{AD}),$$

todėl

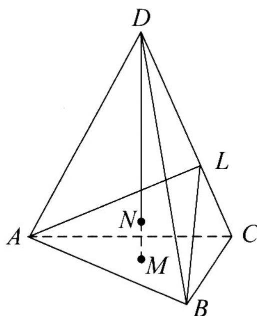
$$\vec{AN} = z\vec{AB}+\frac{5y}{7}\vec{AC}+\frac{2y}{7}\vec{AD} = z(\vec{DB}-\vec{DA})+\frac{5y}{7}(\vec{DC}-\vec{DA})-\frac{2y}{7}\vec{DA} =$$

$$= (-z-y)\vec{DA})+z\vec{DB}+\frac{5y}{7}\vec{DC}$$

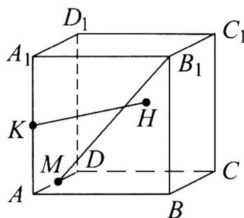
ir

$$\vec{DN} = (1-z-y)\vec{DA}+z\vec{DB}+\frac{5y}{7}\vec{DC}.$$

Abi vektoriaus $\vec{DN}$ išraiškos nekomplanariais vektoriais $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ ir $\vec{DC}$ turi sutapti, todėl turi būti teisingos lygybės $\frac{x}{3(x+1)} = 1-z-y = z = \frac{5y}{7}$. Iš čia $x = \frac{15}{2}$, $y = \frac{7}{17}$, $z = \frac{5}{17}$. Taigi $DN : NM = 15 : 2$.



16 pav.



17 pav.

3. Sakykime, kad erdvėje duoti du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, o kampas tarp jų lygus φ. Skaičius, lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ modulių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų kosinuso, vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga*:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Vektorių skaliarinė sandauga pasižymi šiomis **savybėmis**:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $l(\vec{a}\cdot\vec{b}) = l(\vec{a})\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$; $\vec{a}^{\,2} = 0$ tik tada, kai $\vec{a} = \vec{0}$.

Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Be to, kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ apskaičiuojamas pagal formulę

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

o vektoriaus $\vec{a}$ *modulis* – pagal formulę

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

4 pavyzdys. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos AA_1 vidurys yra taškas K, briaunos AD vidurys – taškas M, sienos CC_1D_1D centras yra taškas H. Įrodykime, kad tiesės KH ir B_1M yra statmenos (17 pav.).

Sprendimas. Akivaizdu, kad reikia įrodyti, jog vektoriai $\vec{KH}$ ir $\vec{B_1M}$ yra statmeni, t. y., kad $\vec{KH}\cdot\vec{B_1M}=0$. Sakykime, kad kubo briaunos ilgis lygus a. Išreikškime vektorius $\vec{KH}$ ir $\vec{B_1M}$ vektoriais $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$:

$$\vec{KH}=\vec{AH}-\vec{AK}=\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AC_1})-\frac{1}{2}\vec{AA_1}=$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{AD}+(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}))-\frac{1}{2}\vec{AA_1}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{AD};$$

$$\vec{B_1M}=\vec{AM}-\vec{AB_1}=\frac{1}{2}\vec{AD}-\vec{AB}-\vec{AA_1}.$$

Pagal skaliarinės sandaugos savybes gauname:

$$\vec{KH}\cdot\vec{B_1M}=(\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{AD})\cdot(-\vec{AB}-\vec{AA_1}+\frac{1}{2}\vec{AD})=$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{AB}^2-\frac{1}{2}\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}+\frac{1}{4}\vec{AB}\cdot\vec{AD}-\vec{AD}\cdot\vec{AB}-\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}+\frac{1}{2}\vec{AD}^2.$$

Aišku, kad

$$\vec{AB}^2=\vec{AD}^2=a^2,\ \vec{AB}\cdot\vec{AA_1}=\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}=0,$$

nes $\vec{AB}\perp\vec{AA_1}$, $\vec{AB}\perp\vec{AD}$, $\vec{AD}\perp\vec{AA_1}$. Todėl $\vec{KH}\cdot\vec{B_1M}=$ $=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=0$. Taigi tiesės KH ir B_1M yra statmenos.

5 pavyzdys. Į kubą įbrėžta sfera. Įrodykime, kad bet kurio jos taško atstumų iki kubo viršūnių kvadratų suma yra vienoda.

Sprendimas. Sakykime, kad į kubą $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įbrėžtos sferos centras yra O, o M – bet kuris jos taškas (18 pav.). Tuomet

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}, \quad \vec{BM} = \vec{BO} + \vec{OM},$$

$$\vec{CM} = \vec{CO} + \vec{OM}, \quad \vec{DM} = \vec{DO} + \vec{OM},$$

$$\vec{A_1M} = \vec{A_1O} + \vec{OM}, \qquad \vec{B_1M} = \vec{B_1O} + \vec{OM},$$

$$\vec{C_1M} = \vec{C_1O} + \vec{OM}, \qquad \vec{D_1M} = \vec{D_1O} + \vec{OM}.$$

Taško M atstumų iki kubo viršūnių kvadratų sumą pažymėkime S. Pasinaudoję skaliarinės sandaugos savybėmis, gauname:

$$S = \vec{AM}^2 + \vec{BM}^2 + \vec{CM}^2 + \vec{DM}^2 + \vec{A_1M}^2 + \vec{B_1M}^2 + \vec{C_1M}^2 + \vec{D_1M}^2 =$$

$$= \vec{AO}^2 + \vec{BO}^2 + \vec{CO}^2 + \vec{DO}^2 + \vec{A_1O}^2 + \vec{B_1O}^2 + \vec{C_1O}^2 + \vec{D_1O}^2 +$$

$$+ 2\vec{OM}\cdot(\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} + \vec{A_1O} + \vec{B_1O} + \vec{C_1O} + \vec{D_1O}) + 8\vec{OM}^2.$$

Jei a – kubo briaunos ilgis, tai $a\sqrt{3}$ – jo įstrižainės ilgis ir

$$AO = BO = CO = DO = A_1O = B_1O = C_1O = D_1O = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

todėl

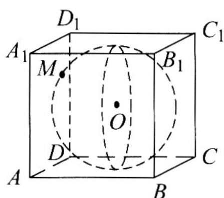
$$\vec{AO}^2 + \vec{BO}^2 + \vec{CO}^2 + \vec{DO}^2 + \vec{A_1O}^2 + \vec{B_1O}^2 + \vec{C_1O}^2 + \vec{D_1O}^2 =$$

$$= 8\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 6a^2.$$

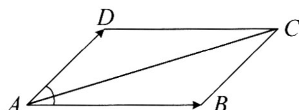
Atkarpa OM yra lygi į kubą įbrėžtos sferos spinduliui, t. y. $OM = \frac{a}{2}$. Kadangi $\vec{C_1O} = -\vec{AO}$, tai $\vec{C_1O} + \vec{AO} = \vec{0}$. Analogiškai

$$\vec{B_1O} + \vec{OD} = \vec{0}, \quad \vec{A_1O} + \vec{OC} = \vec{0}, \quad \vec{D_1O} + \vec{OB} = \vec{0}.$$

Taigi skliaustuose esanti aštuonių vektorių suma lygi nuliniam vektoriui. Todėl $S = 6a^2 + 8\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 8a^2$. Ši suma nepriklauso nuo taško M pasirinkimo sferoje.



18 pav.



19 pav.

4. Lygiagretainio $ABCD$ (19 pav.) plotas apskaičiuojamas pagal formulę $S = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$. Todėl

$$S^2 = AB^2 \cdot AD^2 \cdot \sin^2 \angle A = AB^2 \cdot AD^2(1 - \cos^2 \angle A) =$$

$$= AB^2 \cdot AD^2 \left(1 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}\right)^2\right) =$$

$$= AB^2 \cdot AD^2 \, \frac{\vec{AB}^2 \cdot \vec{AD}^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AD})^2}{AB^2 \cdot AD^2} =$$

$$= \vec{AB}^2 \cdot \vec{AD}^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AD})^2 .$$

Tuomet trikampio ABC plotas lygus

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{AB}^2 \cdot \vec{AC}^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} .$$

Sakykime, kad keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikerta taške O (20 pav.). Tuomet

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC +$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin \angle AOD.$$

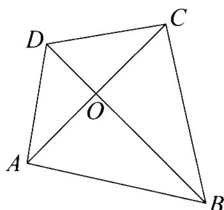
Bet $\angle COD = \angle AOB$, o $\angle BOC = \angle AOD = 180^\circ - \angle AOB$. Todėl

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA) \sin \angle AOB =$$

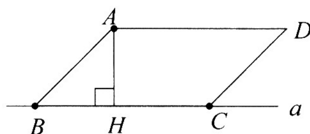
$$=\frac{1}{2}((OA+OC)\cdot OB+OD(OC+OA))\sin\angle AOB=$$

$$=\frac{1}{2}(AC\cdot OB+OD\cdot AC)\cdot\sin\angle AOB=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot(OB+OD)\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOB.$$



20 pav.



21 pav.

Kadangi kampas AOB yra kampas tarp vektorių $\vec{AC}$ ir $\vec{BD}$, tai keturkampio plotui skaičiuoti turime formulę

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{AC}^{\,2}\cdot\vec{BD}^{\,2}-(\vec{AC}\cdot\vec{BD})^2}.$$

Sakykime, kad taškas A nėra tiesėje a, o taškai B ir C yra tiesės a taškai (21 pav.). Nubrėžkime lygiagretainį $BCDA$. Jo aukštinė AH, nubrėžta į kraštinę BC, yra lygi atstumui nuo taško A iki tiesės a. Jei S – lygiagretainio $ABCD$ plotas, tai $S=BC\cdot AH$; iš čia

$$AH=\frac{S}{BC}=\frac{\sqrt{\vec{BA}^{\,2}\cdot\vec{BC}^{\,2}-(\vec{BA}\cdot\vec{BC})^2}}{|\vec{BC}|}.$$

6 pavyzdys. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų ilgiai yra: $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=1$. Taškas M yra briaunoje BB_1 ir $BM=\frac{1}{3}$. Raskime gretasienio pjūvio plokštuma, einančia per taškus A, M ir C_1, plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad plokštuma, einanti per taškus A, C_1 ir M, kerta gretasienio briauną DD_1 taške N (22 pav.). Tuomet plokštumos

ir gretasienio pjūvis yra keturkampis AMC_1N, o atkarpos AC_1 ir MN yra jo įstrižainės; todėl jo plotas *yra*

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AC_1}^2 \cdot \overrightarrow{MN}^2 - (\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{MN})^2}.$$

Sakykime, kad $\overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{DD_1} = x\overrightarrow{AA_1}$. Tada $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \left(x + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AA_1}$. Kita vertus (pagal gretasienio taisyklę), $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$. Sulyginę abi vektoriaus $\overrightarrow{AC_1}$ išraiškas, gauname, kad $x + \frac{1}{3} = 1$, t. y. $x = \frac{2}{3}$. Taigi $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

Kadangi

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}) - (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}) = ,$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 16,\ \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = 9,\ \overrightarrow{AA_1}^2 = AA_1^2 = 1,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0,$$

tai

$$\overrightarrow{AC_1}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 = 26,$$

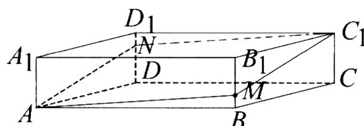
$$\overrightarrow{MN}^2 = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AA_1}^2 = 25\frac{1}{9},$$

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}) =$$

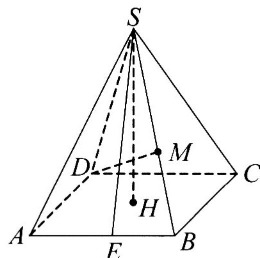
$$= -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}^2 = -6\frac{2}{3}.$$

Taigi keturkampio AMC_1N plotas yra

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{26\cdot 25\frac{1}{9}-\left(6\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{37}{3}.$$



22 pav.



23 pav.

7 pavyzdys. Taisyklingosios keturkampės piramidės $ABCDS$ pagrindo kraštinės AB ilgis 6, aukštinės SH ilgis $\sqrt{7}$. Taškas M yra briaunoje SB ir $BM : MS = 2 : 3$. Raskime atstumą nuo viršūnės A iki tiesės DM.

Sprendimas. Ieškomasis atstumas d yra skaičiuojamas pagal formulę

$$d=\frac{\sqrt{\overrightarrow{DA}^2\cdot\overrightarrow{DM}^2-(\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DM})^2}}{|\overrightarrow{DM}|}.$$

Vektorių $\overrightarrow{DM}$ išreikškime vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$:

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AS}}{2+3}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AS}.$$

Apskaičiuokime skaliarines sandaugas $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}$ ir $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}$. Iš trikampio ASH randame:

$$AS=\sqrt{\overrightarrow{AH}^2+\overrightarrow{HS}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2}=5.$$

Nubrėžkime $SE\perp AB$; tuomet $AE=3$ ir $\cos\angle SAB=\frac{AE}{AS}=\frac{3}{5}$.

Todėl

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AS}|\cdot\cos\angle SAB=6\cdot5\cdot\frac{3}{5}=18\,0.$$

Kadangi $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AD}^2=36$, tai

$$\overrightarrow{DM}^2=\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AS}\right)^2=\frac{9}{25}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\frac{4}{25}\overrightarrow{AS}^2+$$

$$+\frac{12}{25}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}=\frac{9}{25}\cdot36+36+\frac{4}{25}\cdot25+\frac{12}{25}\cdot18-\frac{4}{5}\cdot18=$$

$$=\frac{1180}{25};$$

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DM}=-\overrightarrow{AD}\cdot\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AS}\right)=\overrightarrow{AD}^2-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}=$$

$$=36-\frac{2}{5}\cdot18=\frac{144}{5}.$$

Taigi ieškomasis atstumas yra

$$d=\frac{\sqrt{36\cdot\frac{1180}{25}-\left(\frac{144}{5}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1180}{25}}}=\sqrt{\frac{5436}{295}}.$$

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunose AB ir CD yra taškai P ir Q tokie, kad $AP:PB=CQ:QD$. Įrodykite, kad atkarpų AC, BD ir PQ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

2. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunos AB vidurio taškas E, o sienos BCD pusiaukraštinių sankirtos taškas F. Tiesė EF kerta plokštumą, einančią per taškus A, C ir D, taške M. Įrodykite, kad $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

3. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunose DA ir DB ir DC yra tokie taškai M, N ir K, kad $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$, $DK = \frac{3}{5}DC$. Taškas L yra trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Plokštuma, einanti per taškus M, N ir K, kerta atkarpą DL taške P. Apskaičiuokite $DP : DL$.

4. Atkarpos, jungiančios trikampės piramidės priešingų briaunų vidurio taškus, susikerta viename taške, kuris dalija jas pusiau. Įrodykite.

5. Jei trikampės piramidės $ABCD$ briaunos AB ir CD statmenos, briaunos AC ir BD taip pat statmenos, tai briaunos AD ir BC irgi statmenos. Įrodykite.

6. Kokį kampą sudaro dviejų gretimų kubo sienų prasilenkiančios įstrižainės?

7. Taisyklingojo tetraedro $ABCD$ briaunų AD ir CD vidurio taškai yra M ir P, sienų BCD ir ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškai yra N ir Q. Raskite kampą tarp tiesių MN ir PQ.

Nurodymas. Taisyklingasis tetraedras – tai trikampė piramidė, kurios visos sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai.

8. Apie kubą apibrėžta sfera. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio sferos taško iki kubo viršūnių kvadratų suma yra vienoda visiems sferos taškams.

9. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus a, o briaunos SA ilgis b. Briaunose CS ir DS yra taškai M ir N, kad $CM : MS = DN : NS = 2 : 3$. Raskite keturkampio $ABMN$ plotą.

10. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų ilgiai $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. Raskite atstumą nuo briaunos A_1D_1 vidurio taško M iki tiesės AC_1.



VIII. PROGRESIJOS

Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas
(Vilniaus universitetas, Vilniaus pedagoginis universitetas)

Su aritmetine ir geometrine progresijomis susipažinote 11-oje klasėje. Sprendžiant šią užduotį mokyklines žinias apie aritmetinę ir geometrinę progresijas reikės truputį praplėsti. Todėl pirmiausia išnagrinėkite pateiktą medžiagą, išspręstus pavyzdžius. Prieš savarankišką užduotį pateikiama keletas pratimų ir jų atsakymai. Šie pratimai skirti įgūdžiams lavinti. Išsprendę juos, nesunkiai įveiksite ir pačią užduotį. Pratimų sprendimų siųsti nereikia.

Funkcija f: $\mathrm{N} \to \mathrm{R}$ (kiekvienam natūraliajam skaičiui priskirianti realųjį skaičių) vadinama *realiųjų skaičių seka.* Funkcijos reikšmės vadinamos *sekos nariais*. Sekos narius žymėsime viena raide su indeksu n: $x_n = f(n)$. Sekas taip pat žymėsime (x_n), (y_n), (a_n), (b_n) ir pan. Sekos narys x_n vadinamas *n-uoju sekos nariu.* Kartais seka nusakoma užrašant kelis jos narius.

Seka (x_n) vadinama *didėjančia,* jeigu $x_n < x_{n+1}$ su visais $n \in \mathrm{N}$.

Seka (x_n) vadinama *mažėjančia,* jeigu $x_n > x_{n+1}$ su visais $n \in \mathrm{N}$.

Čia nagrinėsime tik dvi sekas: *aritmetinę ir geometrinę progresijas.*

1. Aritmetinė progresija

1 apibrėžimas. Skaičių seka (a_n), kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi d, vadinama *aritmetine progresija*, o skaičius d – šios progresijos *skirtumu.*

Taigi aritmetinė progresija yra apibrėžiama rekurenčiąja formule:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in \mathrm{N}. \qquad (1)$$

Aritmetinei progresijai apibrėžti pakanka nurodyti pirmąjį sekos narį ir progresijos skirtumą.

Akivaizdu, kad aritmetinė progresija (a_n) yra didėjanti, kai $d > 0$; ji yra mažėjanti, kai $d < 0$. Kai $d = 0$, visi aritmetinės progresijos nariai lygūs tam pačiam skaičiui (pastovi seka).

Dažnai reikia nagrinėti tik baigtinį skaičių vienas po kito einančių aritmetinės progresijos narių. Tokia aritmetinės progresijos „atkarpa“ yra vadinama *baigtine aritmetine progresija.*

11-tos klasės vadovėlyje [1] yra įrodyta, kad n-asis aritmetinės progresijos (a_n) narys a_n apskaičiuojamas pagal formulę

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad (2)$$

o pirmųjų n šios progresijos narių suma S_n – pagal formulę

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

Į (3) formulę įrašę a_n išraišką iš (2) formulės, gauname, kad

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (4)$$

1 teorema. *Seka (a_n) yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai kiekvieną jos narį galima užrašyti formule:*

$$a_n = \alpha n + \beta\,,\ n = 1, 2, 3, ... \qquad (5)$$

(čia α, β – realieji skaičiai).

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija. Tada pagal (2) formulę: $a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d)$. Pažymėję $\alpha = d$, $\beta = a_1 - d$, gauname (5) formulę.

Pakankamumas. Sakykime, kad sekos (a_n) nariai apskaičiuojami pagal formulę $a_n = \alpha n + \beta$. Tada $a_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$. Todėl $a_{n+1} - a_n = \alpha$, o iš čia $a_{n+1} = a_n + \alpha$. Matome, kad sekos (a_n) nariai tenkina aritmetinės progresijos apibrėžimą.

2 teorema. *Seka (a_n) yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai jos n pirmųjų narių sumą galima apskaičiuoti pagal formulę*

$$S_n = An^2 + Bn \qquad (6)$$

(čia A, B – realieji skaičiai).

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija. Pagal (4) formulę gauname:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{dn^2 + (2a_1 - d) \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n = An^2 + B;$$

čia $A = \dfrac{d}{2}$, $B = \dfrac{2a_1 - d}{2}$.

Pakankamumas. Sakykime, kad sekos (a_n) n pirmųjų narių sumą galima apskaičiuoti pagal (6) formulę. Tada

$$a_n = S_n - S_{n-1} = An^2 + Bn - A(n-1)^2 - B(n-1) =$$
$$= 2An + (B - A) = \alpha n + \beta\text{; čia } \alpha = 2A,\ \beta = B - A.$$

Pagal 1 teoremą seka (a_n) yra aritmetinė progresija.

3 teorema. *Seka* (a_n) *yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai jos kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus jo gretimų narių aritmetiniam vidurkiui:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2},\ n \in \mathrm{N}. \qquad (7)$$

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija. Tada $a_{n+1} = a_n + d$ ir $a_{n+2} = a_{n+1} + d$. Todėl

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{a_n + a_{n+1} + d}{2} = \frac{2a_n + 2d}{2} = a_n + d = a_{n+1}.$$

Pakankamumas. Sakykime, kad sekos (a_n) nariai tenkina (7) lygybę. Iš jos išplaukia, kad $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$. Imdami n reikšmes, lygias 1, 2, 3, 4, 5,... , gauname:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \ldots$$

Taigi skirtumas tarp bet kurio sekos (a_n) nario ir prieš jį esančio nario yra pastovus. Todėl seka (a_n) yra aritmetinė progresija.

Pastaba. Pakankamumas įrodytas negriežtai. Griežtai įrodant reikėtų taikyti matematinės indukcijos principą.

Pratimas. Įrodykite, kad aritmetinės progresijos (a_n) nariai tenkina lygybę

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \qquad (8)$$

kai $n \geq 2$ ir $k < n$.

4 teorema. *Seka* (a_n) *yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai ji turi tokią savybę:*

$$a_n + a_m = a_k + a_l,\ jei\ n + m = k + l. \qquad (9)$$

Įrodymas. Būtinumas. Sakykime, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija. Tada (pagal (2) formulę) $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_m = a_1 + d(m-1)$, $a_k = a_1 + d(k-1)$, $a_l = a_1 + d(l-1)$. Iš čia

$$a_n + a_m = a_1 + d(n-1) + a_1 + d(m-1) = 2a_1 + d(n+m) - 2d,$$

$$a_k + a_l = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(l-1) = 2a_1 + d(k+l) - 2d.$$

Jei $n + m = k + l$, tai $a_n + a_m = a_k + a_l$. Taigi aritmetinė progresija turi (9) savybę.

Pakankamumas. Sakykime, kad galioja lygybė $a_n + a_m = a_k + a_l$, kai $n + m = k + l$. Tada, pasirinkę $n \geq 2$, $m = n$, $k = n-1$ ir $l = n+1$, gausime lygybę $a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, o iš čia – formulę $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n \geq 2)$. Pagal 3 teoremą seka (a_n) yra aritmetinė progresija.

Pritaikę 4 teoremą baigtinei aritmetinei progresijai a_1, a_2, a_3, ..., a_n, gauname tokią jos savybę:

vienodai nutolusių nuo progresijos galų narių sumos yra lygios, t. y.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}. \quad (10)$$

Pasinaudojus (9) savybe, galima išvesti paprastesnę formulę sumai S_n, kai n yra nelyginis skaičius, apskaičiuoti. Kai $n = 2k - 1$, gauname: $n + 1 = 2k = k + k$. Tada (pagal 4 teoremą) $a_n + a_1 = a_k + a_k = 2a_k$. Įrašę šį rezultatą į (3), turėsime formulę

$$S_n = n \cdot a_k, \; n = 2k - 1. \quad (11)$$

Pratimas. Aritmetinės progresijos penktasis narys lygus 10. Raskite šios progresijos devynių narių sumą.

Išspręskime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Raskime aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų dešimties narių sumą, jeigu $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

Sprendimas. Kadangi $a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12} = a_1 + a_{20}$ (pagal 4 teoremą), tai $2(a_1 + a_{20}) = 20$, o $a_1 + a_{20} = 10$. Vadinasi,

$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100$.

Ats.: 100.

2 pavyzdys. Tarkime, kad skaičių trejetai $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ ir $(\lg a - \lg(2b))$, $(\lg(2b) - \lg(3c))$, $(\lg(3c) - \lg a)$ yra aritmetinių progresijų paeiliui einantys nariai. Įrodykime, kad tada egzistuoja toks trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra lygūs a, b ir c. Nustatykime to trikampio rūšį (pagal kampus).

*Sprendimas.*Remdamiesi 3 teorema, gauname:

$$\begin{cases} 2\lg b = \lg a + \lg c, \\ 2(\lg(2b) - \lg(3c)) = (\lg a - \lg(2b)) + (\lg(3c) - \lg a) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lg b = \lg a + \lg c, \\ \lg(2b) = \lg(3c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac, \\ 2b = 3c. \end{cases} \Rightarrow a = \frac{9c}{4}, \ b = \frac{3c}{2}.$$

Skaičių trejetas $(a, b, c) = \left(\frac{9c}{4}, \frac{3c}{2}, c\right)$ gali būti trikampio kraštinių ilgių rinkinys, nes $\frac{9c}{4} < \frac{3c}{2} + c$, kai $c > 0$.

Taigi toks trikampis egzistuoja. Kadangi $a^2 = \frac{81c^2}{16}$, $b^2 = \frac{9c^2}{4}$, tai $a^2 > b^2 + c^2$. Vadinasi, trikampis yra bukasis.

3 pavyzdys. Seka (x_n) pasižymi savybe: jos gretimų narių skirtumai sudaro aritmetinę progresiją, kurios pirmasis narys yra lygus jos skirtumui d. Raskime sekos (x_n) n-ojo nario formulę, jeigu jos pirmasis narys lygus a.

Sprendimas. Pagal sąlygą gauname:

$x_2 - x_1 = d$, $x_3 - x_2 = 2d$, $x_4 - x_3 = 3d$, ..., $x_n - x_{n-1} = (n-1)d$.

Sudėję šias lygybes, gauname: $x_n - x_1 = \frac{(n-1) \cdot n}{2} d$. Taigi

$$x_n = a + \frac{n(n-1)}{2} d. \qquad (12)$$

4 pavyzdys. Lyginiai natūralieji skaičiai surašyti į lentelę:

2				
4	6			
8	10	12		
14	16	18	20	
...	....			
a_n	....			a_{2n}
...	....			

Apskaičiuokime n-osios eilutės skaičių sumą.

Sprendimas. Sekos 2, 4, 8, 14, 22, ..., a_n gretimų narių skirtumai sudaro aritmetinę progresiją 2, 4, 6, ..., kurios skirtumas $d = 2$. Pagal (12) formulę: $a_n = 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 - n + 2$. n-ojoje eilutėje yra n narių, kurie sudaro aritmetinę progresiją (jos skirtumas irgi 2). Taigi šios eilutės narių suma:

$$A_n = \frac{2(n^2 - n + 2) + 2 \cdot (n-1)}{2} \cdot n = n^3 + n.$$

Ats.: $n^3 + n$.

5 pavyzdys. Įrodykime, kad $S_{m+n} = \frac{m+n}{m-n}(S_m - S_n)$, jeigu S_n, S_m, S_{m+n} – atitinkamai aritmetinės progresijos pirmųjų n narių, m narių ir $(m+n)$ narių sumos.

Įrodymas. Remdamiesi 2 teorema, galime užrašyti:

$$S_n = An^2 + Bn, \ S_m = Am^2 + Bm,$$
$$S_{m+n} = A(m+n)^2 + B(m+n).$$

Taigi

$$\frac{m+n}{m-n}(S_m - S_n) = \frac{m+n}{m-n}(Am^2 + Bm - An^2 - Bn) =$$

$$= \frac{m+n}{m-n}[A(m^2 - n^2) + B(m+n)] = \frac{(m+n)(m-n)}{m-n}[A(m+n) + B] =$$

$= (m+n)[A(m+n)+B] = A(m+n)^2 + B(m+n) = S_{m+n}$.

6 pavyzdys. Raskime visas paeiliui einančių natūraliųjų skaičių sekas, kurių narių sumos lygios 1000.

Sprendimas. Sakykime, kad pirmasis tokios sekos narys yra a, o sekoje yra n narių. Tada (pagal (4) formulę):

$$\frac{2a + 1 \cdot (n-1)}{2} \cdot n = 1000, \text{ t. y. } a = \frac{1000}{n} - \frac{n-1}{2}.$$

Nagrinėkime du atvejus.

1 atvejis. Tegu n – nelyginis skaičius. Šiuo atveju 1000 dalijasi iš n tik tada, kai $n = 1, 5, 25$ ir 125. Kai $n = 1$, gauname seką, sudarytą iš vieno skaičiaus 1000. Vargu ar tokią seką galime laikyti uždavinio sprendiniu.

Kai $n = 5$, tai $a = 118$ ir gauname seką 198, 199, 200, 201, 202.

Kai $n = 25$, tai $a = 28$ ir gauname seką 28, 29, 30, ..., 51, 52.

Kai $n = 125$, tai $a < 0$ ir todėl sekos, sudarytos iš natūraliųjų skaičių, nėra.

2) atvejis. Tegu n – lyginis skaičius. Šiuo atveju skaičių $\frac{1000}{n}$ ir $\frac{n-1}{2}$ trupmeninės dalys turi būti lygios $\frac{1}{2}$. Todėl reikia patikrinti tik tris n reikšmes: 16, $16 \cdot 5 = 80$ ir $16 \cdot 25 = 400$. Tik tada, kai $n = 16$, gauname teigiamą skaičiaus n reikšmę: $n = 55$. Taigi turime tik vieną seką: 55, 56, 57, ..., 69, 70.

Ats.: Trys sekos: 198, 199, 200, 201, 202; 28, 29, 30, ..., 51, 52; 55, 56, 57, ..., 69, 70.

2. Geometrinė progresija.

2 apibrėžimas. *Skaičių seka (b_n), kurios pirmasis narys nelygus nuliui ($b_1 \neq 0$), o kiekvienas kitas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį einančiam nariui, padaugintam iš nelygaus nuliui skaičiaus q, vadinama geometrine progresija, o skaičius q – šios progresijos vardikliu.*

Taigi geometrinė progresija pasižymi **savybe**:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q\,,\ n \in \mathrm{N}. \tag{13}$$

Geometrinė progresija apibrėžiama pirmuoju sekos nariu b_1 ir progresijos vardikliu q. Kai $q = 1$, gaunama pastovi seka. Kai $b_1 > 0$ ir $q > 1$, geometrinė progresija yra *didėjanti*. Kai $q = 1$, gaunama pastovi seka. Kai $b_1 > 0$, o $0 < q < 1$, geometrinė progresija yra *mažėjanti*. Kai $q < 0$, geometrinė progresija nei didėjanti, nei mažėjanti.

11-tos klasės vadovėlyje [1] įrodyta, kad n-asis geometrinės progresijos narys apskaičiuojamas pagal formulę

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \tag{14}$$

o šios progresijos pirmųjų n narių suma S_n – pagal formulę

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1). \tag{15}$$

Pastaba. Kartais reikia nagrinėti ir geometrines progresijas (b_n), kurių pirmojo nario indeksas yra nulis, pavyzdžiui, seką $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$.

Nesunku įsitikinti, kad šios sekos narys b_n apskaičiuojamas pagal formulę

$$b_n = b_0 q^n. \tag{16}$$

Seką $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ žymėsime $(b_n)_{n \geq 0}$.

Pratimas. Įrodykite, kad geometrinė progresija (b_n) turi tokią savybę: $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, kai $k \leq n$.

5 teorema. *Seka* (b_n) *yra geometrinė progresija tada ir tik tada, kai jos kiekvieno nario, pradedant antruoju, modulis yra lygus jo gretimų narių geometriniam vidurkiui:*

$$|b_{n+1}| = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}. \tag{17}$$

Teoremą įrodykite savarankiškai.

6 teorema. *Seka* (b_n) *yra geometrinė progresija tada ir tik tada, kai ji turi tokią savybę:*

$$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l,\ \textit{kai}\ n + m = k + l. \tag{18}$$

Teoremą įrodykite savarankiškai.

Kai $n \geq 2$, $m = n$, $k = n - p$, $l = n + p$, $p < n$, gauname (pagal 6 teoremą):

$$b_n^2 = b_{n-p} \cdot b_{n+p}.$$

Taigi gavome tokią geometrinės progresijos (b_n) savybę:

$$b_n^2 = b_{n-p} \cdot b_{n+p}, \text{ kai } n \geq 2, \ p < n. \qquad (19)$$

3 apibrėžimas. *Geometrinė progresija (b_n) vadinama nykstamąja, jeigu jos vardiklio modulis yra mažesnis už 1, t. y.* $|q| < 1$.

Nykstamosios geometrinės progresijos suma skaičiuojama pagal formulę (žr. [1]):

$$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (20)$$

Išspręskime keletą pavyzdžių.

7 pavyzdys. Didėjančios geometrinės progresijos pirmojo ir paskutiniojo narių suma lygi 66, antrojo ir priešpaskutiniojo narių sandauga lygi 128, o visų narių suma lygi 126. Raskite sekos narių skaičių.

Sprendimas. Sakykime, kad pirmasis sekos narys yra b_1, jo vardiklis $q > 1$ ir sekoje yra n narių.

Pagal sąlygą gauname:

$$\begin{cases} b_1(1 + q^{n-1}) = 66, \\ b_1^2 q^{n-1} = 128, \\ b_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 126. \end{cases}$$

Iš pirmųjų dviejų lygčių išplaukia, kad $b_1^2 - 66b_1 + 128 = 0$. Šios lygties sprendiniai: $(b_1)_1 = 64$, $(b_1)_2 = 2$. Šias b reikšmes įrašę į antrąją lygtį, gauname: $q^{n-1} = \dfrac{1}{32}$ ir $q^{n-1} = 32$.

Kadangi $q^n = q^{n-1} \cdot q$, tai $b_1 \cdot \dfrac{1 - q \cdot q^{n-1}}{1 - q} = 126$. Kai $(b_1)_1 = 64$

ir $q^{n-1} = \frac{1}{32}$, gauname: $q_1 = \frac{1}{2}$; kai $(b_1)_2 = 2$ ir $q^{n-1} = 32$, $q_2 = 2$. Kadangi geometrinė progresija yra didėjanti, tai jos vardiklis $q = 2$.

Taigi $2^{n-1} = 32$. Iš čia gauname $n = 6$.

Ats.: 6.

8 pavyzdys. S_n – geometrinės progresijos n pirmųjų narių suma. Įrodykime, kad

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

Įrodymas. Kadangi $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$,

$$S_{2n} - S_n = b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{2n} = b_{n+1}(1 + q + ... + q^{n-1}) =$$
$$= b_{n+1} \frac{1-q^n}{1-q},$$

$$S_{3n} - S_{2n} = b_{2n+1} \frac{1-q^n}{1-q} \text{ ir } b_1 \cdot b_{2n+1} = b_{n+1}^2,$$

tai

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = b_1 \cdot b_{2n+1} \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^2 = b_{n+1}^2 \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^2 = (S_{2n} - S_n)^2.$$

9 pavyzdys. Raskime nykstamosios geometrinės progresijos vardiklį, jeigu jos kiekvienas narys yra 4 kartus didesnis už po jo einančių visų narių sumą.

Sprendimas. Pagal sąlygą gauname:

$$b_n = 4\frac{b_{n+1}}{1-q} \Rightarrow b_1 q^{n-1} = 4\frac{b_1 q^n}{1-q} \Rightarrow 1 = \frac{4q}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{5}.$$

Ats.: $\frac{1}{5}$.

3. Aritmetinė-geometrinė progresija

4 apibrėžimas. *Seka* $(x_n)_{n\geq 0}$, *apibrėžta rekurenčiąja formule*

$$x_{n+1} = qx_n + d \ \ (q \neq 1, d \neq 0), \qquad (21)$$

yra vadinama aritmetine-geometrine progresija.

Kai $d = 0$, gauname geometrinę progresiją, apibrėžtą rekurenčiąja formule, $x_{n+1} = qx_n$, o kai $q = 1$, – aritmetinę progresiją, apibrėžtą rekurenčiąja formule $x_{n+1} = x_n + d$.

Surasime formulę aritmetinės-geometrinės progresijos nariui x_n apskaičiuoti.

7 teorema. *Jeigu seka* $(x_n)_{n\geq 0}$ *yra aritmetinė-geometrinė progresija, tai seka* $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = x_n - x$, x – *lygties* $x = qx + d$ *sprendinys yra geometrinė progresija.*

Įrodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad lygtis $x = qx + d$ yra gauta (21) formulėje vietoj x_{n+1} ir x_n įrašius x.

Pagal teoremos sąlygą turime:

$$b_{n+1} = x_{n+1} - x = qx_n + d - x = q(b_n + x) + d - x =$$
$$= qb_n + \underbrace{qx + d - x}_{=0} = qb_n.$$

Matome, kad seka $(b_n)_{n\geq 0}$ yra geometrinė progresija. Jos narys b_n apskaičiuojamas pagal formulę $b_n = b_0 q^n$; čia $b_0 = x_0 - x$, $x = \dfrac{d}{1-q}$.

Išvada. *Jeigu seka* $(x_n)_{n\geq 0}$ *yra aritmetinė-geometrinė progresija, tai jos narius galima skaičiuoti pagal formulę*

$$x_n = b_n + x = \left(x_0 - \frac{d}{1-q}\right)\cdot q^n + \frac{d}{1-q}. \qquad (22)$$

10 pavyzdys. Raskime formulę sekos $x_{n+1} = 0{,}99x_n + 1$, $x_0 = 5$ nariams x_n apskaičiuoti.

Sprendimas. Pagal (22) formulę gauname:

$$x_n = \left(5 - \frac{1}{1-0{,}99}\right)\cdot 0{,}99^n + \frac{1}{1-0{,}99} = -95\cdot 0{,}99^n + 100.$$

11 pavyzdys. Raskime formulę sekos $x_{n+1} = 4x_n - 1$, $x_1 = 3$, nariui x_n apskaičiuoti.

Sprendimas. Lygties $x = 4x - 1$ sprendinys yra $x = \frac{1}{3}$. Seka (b_n) (čia $b_n = x_n - \frac{1}{3}$) yra geometrinė progresija, apibrėžta rekurenčiąja formule $b_{n+1} = 4b_n$, $b_1 = x_1 - x = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

Taigi $b_n = b_1 \cdot 4^{n-1} = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1}$ ir $x_n = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} + \frac{1}{3}$.

PRATIMAI

1. S_n – aritmetinės progresijos n pirmųjų narių suma. Apskaičiuokite S_{250}, jeigu $S_{100} = S_{150}$. (*Ats.:* $S_{250} = 0$.)

2. Raskite mažiausią triženklį skaičių, kurio skaitmenys sudaro didėjančią aritmetinę progresiją, o skirtumas tarp skaičiaus, užrašyto tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka, ir šio skaičiaus lygus 396. (*Ats.:* 135.)

3. Raskite aritmetinę progresiją (a_n), jeigu jos pirmųjų dešimties narių suma lygi 300, o pirmasis, antrasis ir penktasis nariai sudaro geometrinę progresiją. (*Ats.:* $a_1 = 3, d = 6$.)

4. Raskite triženklį skaičių, kurio skaitmenys sudaro geometrinę progresiją. Jeigu iš šio skaičiaus atimtume 792, tai gautume skaičių, užrašytą tais pačiais skaitmenimis tik atvirkščia tvarka. Jeigu ieškomo skaičiaus antrąjį skaitmenį padidintume 2, tai gautojo skaičiaus skaitmenys sudarytų aritmetinę progresiją. (*Ats.:* 931.)

5. Penktojo ir keturiasdešimt pirmojo geometrinės progresijos narių sandauga lygi 0,01. Raskite 23-ąjį šios progresijos narį. (*Ats.:* 0,1.)

6. Raskite mažėjančios geometrinės progresijos trečiojo ir penkioliktojo narių santykį, jeigu šios progresijos dvylikos narių, pradedant 13-uoju nariu, suma sudaro 40 % jos pirmųjų dvylikos narių sumos. $\left(\textit{Ats.:}\ \frac{5}{2}.\right)$

7. Trikampio vienas kampas lygus 120°, o kraštinės sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad kraštinių ilgiai proporcingi skaičiams 3, 5 ir 7.

8. Raskite nykstančią progresiją (b_n), jeigu jos suma lygi 16, o progresijos (b_n^2) suma lygi $153\frac{3}{5}$. $\left(\textit{Ats.:}\ b_1 = 12, q = \frac{1}{4}.\right)$

9. Išspręskite lygtį $4 + 9 + 14 + ... + x = 1357$. ($\textit{Ats.:}\ x = 114.$)

10. Raskite visus pirminius triženklius skaičius, kurių skaitmenys sudaro geometrinę progresiją, o vardiklis – natūralusis skaičius, nelygus 1. (*Ats.:* 139 ir 421.)

11. Duotos dvi geometrinės progresijos: 2, 7, 12, ... ir 3, 10, 17, ... Raskite 50 pirmųjų sutampančių abiejų progresijų narių sumą. (*Ats.:* 43 725.)

12. Sekos 1, 8, 22, 43, ... gretimų narių skirtumai sudaro aritmetinę progresiją. Kuris sekos narys lygus 35 351? (*Ats.:* 101.)

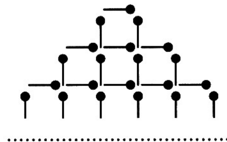
13. Jeigu teigiami skaičiai a, b ir c, nelygūs 1, sudaro geometrinę progresiją, tai skaičiai $\frac{1}{\log_a N}$, $\frac{1}{\log_b N}$, $\frac{1}{\log_c N}$ $(N \neq 1)$ sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite.

14. Raskite x_n, jeigu:

a) $x_{n+1} = \frac{x_n + 8}{5}$, $x_0 = 1$; $\left(\textit{Ats.:}\ x_n = 2 - \frac{1}{5^n}.\right)$

b) $x_{n+1} = 2x_n - 3$, $x_1 = 1$. ($\textit{Ats.:}\ x_n = 3 - 2^n.$)

15. Iš degtukų sudėta figūra. 1-ojoje eilėje yra 3 degtukai, 2-ojoje eilėje yra 7 degtukai, 3-ojoje eilėje yra 11 degtukų ir t. t. Kiek degtukų yra n-ojoje eilėje? Kiek reikia degtukų sudėti figūrai, turinčiai n eilių? Kiek eilių galima sudėti iš 10 440 degtukų? (*Ats.:* $4n-1$, $2n^2+n$, 72.)



AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Kulinarijos parduotuvė gruodžio mėnesį pradėjo prekiauti nauju kulinarijos gaminiu – tortu „Smaližius“. Per 26 darbo dienas buvo planuojama parduoti 4000 tortų. Pirmąją dieną buvo parduoti 105 tortai. Kiekvieną kitą darbo dieną buvo parduodama po 10 tortų daugiau negu prieš tai buvusią dieną ir planuotus 4000 tortų pardavė anksčiau (per natūralųjį dienų skaičių!) Po to kiekvieną dieną buvo parduodama po 13 tortų mažiau negu plano įvykdymo dieną. Kiek procentų buvo viršytas tortų pardavimo planas?

2. Trikampio ABC kraštinių AB, BC ir CA ilgiai sudaro aritmetinę progresiją. Apskaičiuokite trikampio aukštinę AD, jeigu į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus r.

3. Kristina Palangos paplūdimyje rado 352 gintaro gabalėlius ir juos sudėliojo į dėžutes. Į pirmąją dėžutę ji įdėjo keletą gabalėlių gintaro, į antrąją dėžutę – 5 gabalėliais daugiau negu į pirmąją, į trečiąją dėžutę – 5 gabalėliais daugiau negu į antrąją ir t. t. Į kiek dėžučių Kristina sudėjo gintaro gabalėlius? Kiek gintaro gabalėlių ji įdėjo į pirmąją dėžutę?

4. Karibų piratai, vadovaujami Juodojo Barto, užgrobė laivą, vežantį aukso krovinį. Piratų grobis – 25 502 500 auksinių monetų. Piratai nutarė grobį pasidalinti. Juodasis Bartas visas monetas išdėliojo krūvelėmis į vieną eilę: pirmoje krūvelėje – 1 moneta, antroje krūvelėje – 3 monetos, trečioje krūvelėje – 5 monetos ir t. t. Mažiausiai mūšyje pasižymėjęs piratas gavo pirmąją krūvelę,

antrasis piratas gavo kitas dvi krūveles, trečiasis – kitas tris krūveles ir t. t. Paskutinis piratas – vadas Juodasis Bartas – pasiėmė likusias krūveles auksinių monetų. Kiek buvo piratų? Kiek monetų teko Juodajam Bartui?

5. Trys skaičiai yra paeiliui einantys geometrinės progresijos nariai. Jeigu iš trečiojo skaičiaus atimtume 4, tai gautume 3 paeiliui einančius aritmetinės progresijos narius. Jeigu dabar iš antrojo ir trečiojo aritmetinės progresijos narių atimtume po 1, tai gautume paeiliui einančius geometrinės progresijos narius. Raskite tuos skaičius.

6. Įrodykite, kad $a^n + c^n > 2b^n$, $n \in \mathrm{N}$, jeigu a, b ir c yra teigiami paeiliui einantys geometrinės progresijos nariai.

7. Įrodykite: jeigu teigiami ir nelygūs 1 skaičiai a, b, c sudaro geometrinę progresiją, tai

$$-\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}$$ – su kiekvienu $x > 0$, $x \neq 1$.

8. Skaičiai $1 - \cos 2x$, $\cos x - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\sin^2 x}$ yra geometrinės progresijos k-sis, $(k+1)$-sis ir $(k+2)$-sis nariai. Raskite visas x ir k reikšmes, jeigu penkioliktasis sekos narys lygus $\frac{27}{8}$.

9. Nykstamos geometrinės progresijos (b_n) suma lygi 3,5, o progresijos (b_n^2) suma lygi $\frac{147}{16}$. Apskaičiuokite progresijos (b_n^3) sumą.

10. Mėnesinis tarnautojo atlyginimas 2007 metais buvo 2000 Lt. Pagal darbo sutartį mėnesinis atlyginimas kiekvienų metų pradžioje didinamas 5 % ir dar pridedama 200 Lt. Apskaičiuokite tarnautojo

mėnesinį atlyginimą $(2007+n)$-aisiais metais. Nuo kurių metų tarnautojo mėnesinis atlyginimas bus didesnis už 5000 Lt?

Literatūra. 1. K. Intienė, A. Skūpas, V. Stakėnas, E. Stankus, V. Vitkus, Matematika 11, II dalis, TEV, Vilnius, 2002, p. 207.



BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Apskaičiuokite S_{100}, kai

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 16} + \ldots + \frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)}.$$

2. Išspręskite nelygybę $\log_{\frac{2}{3}}(3-4x) > 2$.

3. Raskite formulę sekos

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2, \; x_0 = 5$$

nariui x_n apskaičiuoti. Apskaičiuokite x_7.

4. Pirmoje dėžėje yra 4 juodi ir 6 balti vienodo dydžio rutuliukai. Antroje dėžėje – 7 juodi ir 3 balti vienodi rutuliukai, o trečioje dėžėje – tik keletas baltų rutuliukų. Iš atsitiktinai pasirinktos dėžės atsitiktinai ištrauktas rutuliukas yra baltas. Kokia tikimybė, kad jis buvo ištrauktas iš antrosios dėžės?



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $\begin{cases} x + xy + xy^2 = 26, \\ x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 = 156 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + xy + xy^2 = 26, \\ xy(x + xy + xy^2) = 156 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + xy + xy^2 = 26, \\ xy \cdot 26 = 156 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + xy + xy^2 = 26, \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + xy(1 + y) = 26, \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6 + 6y = 26, \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6y = 20, \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{36}{x} = 20, \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 20x + 36 = 0, \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3 \end{cases}$ arba $\begin{cases} x = 18, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Ats.: $(2; 3)$, $\left(18; \dfrac{1}{3}\right)$.

2. Kadangi $yz = \dfrac{1}{x}$, $z = \dfrac{1}{xy}$ ir $zx = \dfrac{1}{y}$, tai

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} =$$

$$= \frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + \frac{1}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y}} =$$

$$= \frac{1}{1 + x + xy} + \frac{x}{1 + x + xy} + \frac{xy}{1 + x + xy} = \frac{1 + x + xy}{1 + x + xy} = 1.$$

Ats.: 1.

3. Ieškomuosius keturis skaičius pažymėkime x_1, x_2, x_3 ir x_4. Pagal uždavinio sąlygą jie turi tenkinti šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + x_4 = 9, \\ x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

Sudėję visas lygtis ir padaliję iš 3, gauname lygtį

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11.$$

Sudėję pirmąsias tris lygtis, gauname lygtį

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8.$$

Iš šių lygčių išplaukia, kad $x_1 = -\frac{3}{2}$. Tada

$$x_2 = 1 - x_1 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$x_3 = 2 - x_1 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

$$x_4 = 5 - x_1 = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

Ats.: $-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}$.

4. Aišku, kad nė vienas vienženklis skaičius netenkina uždavinio sąlygos. Ieškomųjų skaičių taip pat nėra ir tarp dviženklių skaičių $\overline{ab}$, nes

$$10a + b = 13(a + b) \Rightarrow 3a + 12b = 0;$$

pastaroji lygtis neturi natūraliųjų sprendinių.

Nagrinėkime triženklius skaičius $\overline{abc}$. Sudarę lygtį $100a + 10b + c = 13(a + b + c)$ ir pertvarkę ją, gauname ekvivalenčią lygtį $29a = b + 4c$. Lygties dešiniosios pusės didžiausia galima

reikšmė yra lygi 45 (kai $b=c=9$). Vadinasi, kintamasis a gali įgyti tik vieną reikšmę: $a=1$. Todėl skaitmenys b ir c turi tenkinti lygtį $b+4c=29$. Ši lygtis turi tris natūraliuosius sprendinius: 1) $b=9$, $c=5$; 2) $b=5$, $c=6$; 3) $b=1$, $c=7$.

Taigi turime tris triženklius skaičius (117, 156 ir 195), kurie tenkina uždavinio sąlygą.

Nesunku įsitikinti, kad ieškomųjų skaičių nėra tarp keturženklių ir dar didesnių natūraliųjų skaičių.

Ats.: 117, 156, 195.

5. Kadangi

$$xy-3x-5y=xy-3x-5y+15-15=(x-5)(y-3)-15,$$

tai sprendžiame lygtį

$$(x-5)(y-3)=15.$$

Skaičiai $(x-5)$ ir $(y-3)$ turi būti skaičiaus 15 dalikliai, todėl nagrinėsime šiuos atvejus:

1) $\begin{cases} x-5=1, \\ y-3=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=18; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-5=15, \\ y-3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20, \\ y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-5=5, \\ y-3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10, \\ y=6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-5=3, \\ y-3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=8. \end{cases}$

Ats.: (6; 18), (20; 4), (10; 6), (8; 8).

6. Nelygybę $ab>2006a+2007b$ $(a>0, b>0)$ padauginę iš $\dfrac{a+b}{ab}$, turėsime:

$$a+b>2006\frac{a+b}{b}+2007\frac{a+b}{a}=2006+2007+2006\frac{a}{b}+2007\frac{b}{a}=$$

$$= 2006 + 2007 + \left(\sqrt{2006\frac{a}{b}} - \sqrt{2007\frac{b}{a}}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{2006\frac{a}{b}\cdot 2007\frac{b}{a}} \geq$$

$$\geq 2006 + 2007 + 2\sqrt{2006\frac{a}{b}\cdot 2007\frac{b}{a}} =$$

$$= 2006 + 2\sqrt{2006\cdot 2007} + 2007 = \left(\sqrt{2006} + \sqrt{2007}\right)^2.$$

Ats.: $a + b > \left(\sqrt{2006} + \sqrt{2007}\right)^2$.

7. Olimpiados dalyvių skaičius yra lyginis ir dalijasi iš 3. Sakykime, kad nugalėtojų diplomus gavo x dalyvių. Pagal sąlygą $\frac{2}{5}x$ mergaičių gavo diplomus, todėl skaičius x dalijasi ir iš 5; vadinasi, $x \geq 5$. Dalyvių, išsprendusių du ir daugiau uždavinių, yra daugiau negu $4x$, taigi daugiau negu $4\cdot 5 = 20$. Visų dalyvių skaičius yra didesnis už $\frac{3}{2}\cdot 20 = 30$. Pats mažiausias skaičius, didesnis už 30, kuris dalijasi iš 6, yra 36.

Ats.: 36.

8. Pagal veiksmo $\otimes$ apibrėžimą

$$x\otimes 3 = \begin{cases} x+3, & \text{kai } x \leq 3, \\ 2x, & \text{kai } x > 3 \end{cases} \quad \text{ir } 5\otimes x = \begin{cases} 10, & \text{kai } x \leq 5, \\ 5+x, & \text{kai } x > 5. \end{cases}$$

Lygtį $x\otimes 3 = 5\otimes x$ sprendžiame taikydami intervalų metodą:

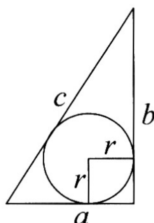
1) $\begin{cases} x \leq 3, \\ x + 3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \varnothing;$

2) $\begin{cases} 3 < x \leq 5, \\ 2x = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 5;$

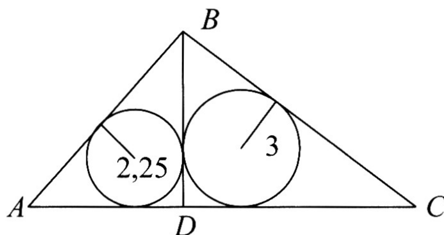
3) $\begin{cases} x > 5, \\ 2x = 5 + x \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Ats.: 5.

9. Pirmiausia raskime sąryšį tarp bet kurio stačiojo trikampio kraštinių ilgių ir į šį trikampį įbrėžtojo apskritimo spindulio (žr. 1 pav.). Pagal apskritimo liestinių, išvestų iš taško, esančio šalia apskritimo, savybę $b-r+a-r=c$. Iš čia $a+b-c=2r$.



1 pav.



2 pav.

Šį sąryšį taikykime statiesiems trikampiams *ADB*, *BDC* ir *ABC*. Pažymėję įbrėžto į ΔABC apskritimo spindulį *r*, gausime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} AD+9-AB=4{,}5, \\ DC+9-BC=6, \\ AB+BC-AC=2r. \end{cases}$$

Šios sistemos lygtis sudedame:

$$AD+DC+18-AC=10{,}5+2r.$$

Kadangi $AD+DC=AC$, tai $r=3{,}75$.

Ats.: 3,75 cm.

10. Sakykime, ledo gabalo matmenys yra *a*, *b* ir *c*, o aptirpusio ledo gabalo *x*, *y* ir *z*. Aišku, kad $x \le a$, $y \le b$, $z \le c$ ir bent viena nelygybė yra griežta. Tegu $x \le a$, $y \le b$, $z < c$.

Tarę, kad $abc = 2xyz$ ir $ab+ac+bc = 2(xy+xz+yz)$, gautume (antrąją lygybę padaliję iš pirmosios) lygybę $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Tačiau $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{a}$, $\frac{1}{y}\ge\frac{1}{b}$ ir $\frac{1}{z}>\frac{1}{c}$; todėl $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Vadinasi, ledo gabalas aptirpti sąlygoje nurodytu būdu negali.

Ats.: Negali.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Suskirstykime šiuos aštuonis asmenis į grupeles pagal draugų skaičių. Yra 8 galimi atvejai: asmenys, neturintys draugų, turintys po vieną draugą, po du draugus ir t. t. Tačiau daugiausiai grupelių galėtų būti septynios, nes esant grupelei neturinčiai draugų, negalės būti grupelės asmenų, turinčių po 7 draugus. Pagal Dirichlė principą bent vienoje grupelėje yra nors du asmenys. Jie turi po vienodą draugų skaičių.

2. Jei nebūtų 9 dėžių su vienos rūšies obuoliais, tai didžiausias dėžių skaičius galėtų būti $8 \cdot 3 = 24$. Taigi yra ne mažiau kaip 9 dėžės su tos pačios rūšies obuoliais.

3. Dalijant 2008 skaičius: $2, 2^2, 2^3, ..., 2^{2008}$ iš 2007 daugiausiai galima gauti 2007 liekanas (0, 1, 2,... , 2006). Vadinasi (pagal Dirichlė principą) yra bent du skaičiai, turintys tą pačią liekaną. Jų skirtumas dalijasi iš 2007.

4. Tegu $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$ yra bet kurių natūraliųjų skaičių dešimtukas. Sudarykime kitą dešimties skaičių rinkinį:

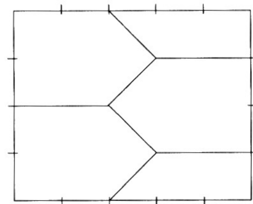
$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + ... + a_{10}. \quad (1)$$

Dalijant šiuos skaičius iš 10 yra galimos liekanos 0, 1, 2, ..., 9. Jeigu liekana lygi nuliui, tai uždavinys jau išspręstas. Sakykime, kad tarp dalybos liekanų nulio nėra. Tada pagal Dirichlė principą bent du (1) rinkinio skaičiai turi tą pačią dalybos iš 10 liekaną. Jų skirtumas dalijasi iš 10. Belieka pasakyti, kad tas skirtumas yra kuris nors iš skaičių $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$ arba kelių šio dešimtuko skaičių suma.

5. Taikykime Dirichlė principą: $76 = 3 \cdot 25 + 1$; čia 25 yra kvadratėlių 20×20 skaičius, gautas dalijant kvadratą tiesėmis, lygiagrečiomis su jo kraštinėmis. Vadinasi, yra bent vienas kvadratėlis, kuriame pasėtos ne mažiau kaip $3 + 1 = 4$ sėklos.

6. Kvadratą padalykime į keturis lygius kvadratėlius; jų kraštinės lygios $\frac{1}{2}$. Pagal Dirichlė principą bent viename iš jų yra bent 2 taškai (iš 5 pažymėtų). Kadangi atstumas tarp bet kurių dviejų mažojo kvadrato taškų yra ne didesnis kaip $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (įstrižainės ilgis), tai atstumas tarp minėtų taškų yra mažesnis už $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Stačiakampį padalijame į 5 dalis taip, kaip parodyta 1 paveiksle. Bent į vieną iš šių dalių (pagal Dirichlė principą) pateks bent du taškai, todėl atstumas tarp jų bus mažesnis už $\sqrt{10}$.



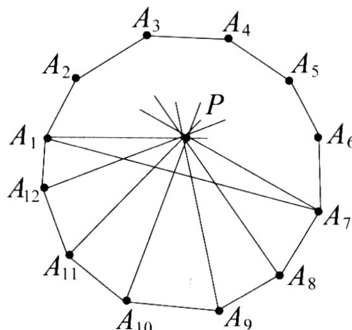
1 pav.

8. Visų devynių skaičių sandauga yra $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 = 3\,628\,800$, o $153^3 = 3\,581\,577$. Todėl tarp trijų grupių turi būti bent viena, kurios skaičių sandauga didesnė arba lygi 154. Bet 154 negalima gauti dauginant skaičius iš pirmo dešimtuko ($154 = 11 \cdot 14$). Tą pačią išvadą galima padaryti ir dėl skaičių 155, 156, 157, 158 ir 159, nes $155 = 5 \cdot 31$; $156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$; 157; $158 = 2 \cdot 79$; $159 = 3 \cdot 53$. Taigi bent vienos grupės skaičių sandauga yra didesnė už 159.

9. Nagrinėkime du atvejus.

1) Taškas P nėra dvylikakampio įstrižainės taškas.

Pažymėkime viršūnes A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_{12}$ ir išveskime įstrižainę A_1A_7. Abiejose jos pusėse yra po 6 kraštines. Taškas P yra vienoje įstrižainės A_1A_7 pusėje. Tegu P yra daugiakampio

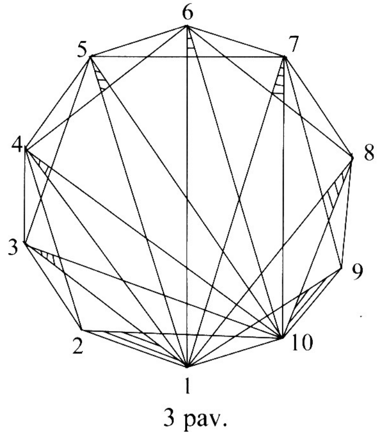


2 pav.

$A_1A_2A_3...,A_7$ viduje (žr. 2 pav.). Tada tiesės PA_7, PA_8, PA_9, PA_{10}, PA_{11}, PA_{12} ir PA_1 (7 tiesės) negali kirsti kraštinių A_7A_8, A_8A_9, A_9A_{10}, $A_{10}A_{11}$, $A_{11}A_{12}$ ir $A_{12}A_1$ (6 kraštinės). Likusios 5 tiesės gali kirsti ne daugiau kaip penkias iš šešių kraštinių. Taigi (pagal Dirichlė principą) yra kraštinė, kurios minėtosios tiesės nekirs.

2) Jei P yra įstrižainės AB taškas, tai tiesės PA ir PB sutampa ir kraštinių nekerta. Likusios 10 tiesių gali kirsti tik 10 kraštinių (iš 12). Taigi yra bent dvi kraštinės, kurių tos tiesės nekerta.

10. Kadangi iš vienos viršūnės išvestos įstrižainės dalija dešimtkampį į 8 trikampius, tai pažymėtų taškų turi būti ne mažiau kaip aštuoni. Ar jų pakanka? Taip! Paveiksle (žr. 3 pav.) parodytas vienas minėtų 8 taškų parinkimo būdas, tenkinantis uždavinio sąlygą: kiekviename užbrūkšniuotame trikampyje imama po vieną pažymėtą tašką.



3 pav.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

Išskaidykite galimai mažesnio laipsnio dauginamaisiais šiuos daugianarius:

1. $P(x) = x(x-1)^2 - 2$ yra trečio laipsnio daugianaris:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Iš pradžių skaidykime $P(x)$ dvinario $(x-a)$ ir kvadratinio trinario $(x^2 + px + q)$ sandauga. Iš lygybės

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-a)(x^2 + px + q)$$

ieškome koeficientų a, p ir q reikšmių, su kuriomis ši lygybė būtų tapatybė.

Atlikę veiksmus dešinėje pusėje, turėsime tokią lygybę:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^3 + (p-a)x^2 + (q-ap)x - aq .$$

Ji galioja su visais realiaisiais skaičiais x tik tada, kai a, p ir q tenkina lygčių sistemą:

$$\begin{cases} p - a = -2, & (1) \\ q - ap = 1, & (2) \\ aq = 2. & (3) \end{cases}$$

Iš (1) ir (2) lygčių gauname $p = a - 2$ ir $q = a^2 - 2a + 1$. Įrašę į (3) lygtį q išraišką, turėsime kubinę lygtį

$$a^3 - 2a^2 + a - 2 = 0 ,$$

kuri turi sprendinį $a = 2$ (tikriname laisvojo nario daliklius!). Tada $p = 0$, $q = 1$. Taigi daugianario $P(x)$ skaidinys yra toks:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1) .$$

Kvadratinio trinario $(x^2 + 1)$ diskriminantas yra neigiamas, todėl šis trinaris yra neišskaidomas pirmo laipsnio dvinarių sandauga.

Ats.: $(x-2)(x^2+1)$.

2. Iš pradžių daugianarį $Q(x) = x^4 + 4x^2 + 3$ skaidykime neapibrėžtųjų koeficientų metodu kvadratinių trinarių

$$(x^2 + bx + c) \text{ ir } (x^2 + px + q)$$

sandauga. Tapatybę

$$x^4 + 4x^2 + 3 = (x^2 + bx + c)\,(x^2 + px + q)$$

turėsime tik tada, kai koeficientai b, c, p ir q tenkins lygčių sistemą:

$$\begin{cases} b + p = 0, \\ c + q + bp = 4, \\ cp + bq = 0, \\ cq = 3. \end{cases}$$

Šią sistemą spręsime taip:

$$\begin{cases} b=-p, \\ c+q=p^2+4, \\ p(c-q)=0, \\ cq=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-p, \\ c+q=p^2+4, \\ p=0, \\ cq=3 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} b=-p, \\ c+q=p^2+4, \\ c=q, \\ cq=3. \end{cases}$$

Antroji sistema sprendinių neturi, todėl toliau nagrinėkime tik pirmąją. Gausime:

$$\begin{cases} b=-p, \\ c+q=p^2+4, \\ p=0, \\ cq=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=p=0, \\ c+q=4, \\ cq=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=p=0, \\ c=4-q, \\ q^2-4q+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=p=0, \\ c=4-q, \\ q\in\{1;3\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=p=0, \\ c=3, \\ q=1 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} b=p=0, \\ c=1, \\ q=3. \end{cases}$$

Abiem atvejais gauname tokį pat skaidinį:

$$x^4+4x^2+3=(x^2+3)\,(x^2+1).$$

Tolesnis skaidymas realiųjų skaičių aibėje yra neįmanomas.

Ats.: $(x^2+3)\,(x^2+1)$.

3. Tarkime, kad $x^4+x^2+1=(x^2+bx+c)\,(x^2+px+q)$.

Ši lygybė yra tapatybė tik tada, kai b, c, p ir q tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} b+p=0, \\ c+q+bp=1, \\ bq+cp=0, \\ cq=1. \end{cases} \qquad (4)$$

Jei būtų $c=q=1$, tai gautume tokią sistemą koeficientams b ir p rasti: $\begin{cases} b+p=0, \\ bp=-1. \end{cases}$

Ji turi du sprendinius: $(b=1, p=-1)$ ir $(b=-1, p=1)$. Abiem atvejais
gauname tokį pat daugianario $R(x)$ skaidinį:

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)\,(x^2-x+1).$$

Trinariai (x^2+x+1) ir (x^2-x+1) yra neišskaidomi (realiųjų skaičių aibėje), nes jų diskriminantai yra neigiami.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad pakanka rasti nors vieną (4) sistemos sprendinį. Todėl šios sistemos toliau nebenagrinėsime.

Ats.: $(x^2+x+1)\,(x^2-x+1)$.

4. Tarkime, kad $x^4+2x^3+5x^2+4x+4=(x^2+px+q)^2$. Aišku, kad ši lygybė galioja su visais realiaisiais skaičiais x tik tada, kai

$$x^4+2x^3+5x^2+4x+4=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$$

Koeficientų p ir q reikšmes randame iš lygčių sistemos:

$$\begin{cases} 2p=2, \\ p^2+2q=5, \\ 2pq=4, \\ q^2=4. \end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį: $p=1$, $q=2$.

Taigi $P(x)=(x^2+x+2)^2$.

Ats.: x^2+x+2.

5.1. $$\frac{x^2-15x+8}{(x+7)(x^2+5)}=\frac{A}{x+7}+\frac{Mx+N}{x^2+5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-15x+8=(A+M)x^2+(7M+N)x+(5A+7N) \text{ ir } x\neq-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+M \quad =1, \\ \quad 7M+N=-15, \\ 5A \quad +7N=8 \end{cases} \Leftrightarrow (A=3, M=-2, N=-1).$$

Vadinasi,

$$\frac{x^2-15x+8}{(x+7)(x^2+5)}=\frac{3}{x+7}-\frac{2x+1}{x^2+5}.$$

Ats.: $\frac{3}{x+7}-\frac{2x+1}{x^2+5}$.

5.2. $\frac{3x^2-3x-1}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1} \Leftrightarrow 3x^2-3x-1=$

$=(A_1+M)x^3+(-2A_1+A_2-4M+N)x^2+(A_1+4M-4N)x+$

$$+(-2A_1+A_2+4N) \text{ ir } x\neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \quad +M \quad = 0, \\ -2A_1+A_2-4M+\ N=3, \\ A_1 \quad +4M-4N=-3, \\ -2A_1+A_2 \quad +4N=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (A_1=1,\ A_2=1,\ M=-1,\ N=0)$.

Vadinasi,

$$\frac{3x^2-3x-1}{(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Ats.: $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{x}{x^2+1}$.

5.3. Iš pradžių išskaidykime vardiklio daugianarį. Taikykime grupavimo metodą:

$$x^3+3x^2+2x+6=(x^3+3x^2)+(2x+6)=$$
$$=x^2(x+3)+2(x+3)=(x+3)(x^2+2).$$

Taigi $\frac{x^2+7x+1}{x^3+3x^2+2x+6}=\frac{x^2+7x+1}{(x+3)(x^2+2)}$.

Toliau: $\frac{x^2+7x+1}{(x+3)(x^2+2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Mx+N}{x^2+2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ x^2+7x+1=(A+M)x^2+(3M+N)x+(2A+3N)\ \text{ir}$$

$$x\neq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} A+M \quad =1,\\ \quad 3M+\ N=7,\\ 2A \quad +3N=1\end{cases} \Leftrightarrow\ (A=-1,\ M=2,\ N=1).$$

Vadinasi, $\dfrac{x^2+7x+1}{x^3+3x^2+2x+6}=-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2x+1}{x^2+2}$.

Ats.: $\dfrac{2x+1}{x^2+2}-\dfrac{1}{x+3}$.

6. Pagal uždavinio sąlygą reikia nustatyti, ar yra toks dvinaris, su kuriuo galiotų tapatybė $P(x)=(x^2+bx+c)(mx+n)$. Koeficientų b, c, m ir n reikšmių ieškokime remdamiesi šiais sąryšiais:

$$2x^3+3x^2-7x-4=(x^2+bx+c)(mx+n)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2x^3+3x^2-7x-4=mx^3+(bm+n)x^2+(bn+cm)x+cn\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=2,\\ bm+n=3,\\ bn+cm=-7,\\ cn=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2,\\ 2b+n=3,\\ bn+2c=-7,\\ cn=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2,\\ n=3-2b,\\ c=\dfrac{2b^2-3b-7}{2},\\ cn=-4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=2,\\ n=3-2b,\\ c=\dfrac{2b^2-3b-7}{2},\\ 4b^3-12b^2-5b+13=0.\end{cases}$$

Pastarosios sistemos ketvirtoji lygtis turi sprendinį $b=1$. Tada gauname tokias kitų koeficientų reikšmes: $m=2$, $n=1$, $c=-4$. Su šiomis koeficientų reikšmėmis galioja tapatybė

$$2x^3+3x^2-7x-4=(x^2+x-4)(2x+1).$$

Ats.: $b=1$, $c=-4$.

7. Tarkime, kad

$$x^4 + mx^3 + 8x^2 + nx + 7 = (x^2 + 3x + 7)(x^2 + px + q).$$

Tada

$$x^4 + mx^3 + 8x^2 + nx + 7$$
$$= x^4 + (p+3)x^3 + (3p+q+7)x^2 + (7p+3q)x + 7q \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+3=m, \\ 3p+q+7=8, \\ 7p+3q=n, \\ 7q=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=1, \\ p+3=m, \\ p=0, \\ n=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m=3,\ n=3,\ p=0,\ q=1).$$

Taigi $x^4 + mx^3 + 8x^2 + nx + 7 = (x^2 + 3x + 7)(x^2 + 1)$.

Ats.: $m = 3,\ n = 3$.

8. Daugianario $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ laisvojo nario dalikliai yra ± 2 ir ± 1. Skaičius $x = 1$ yra šio daugianario šaknis, nes $P(1) = 0$. Vadinasi, daugianario skaidinyje žemesnio laipsnio daugianariais yra dauginamasis $(x-1)$. Šis daugianaris, aišku, yra $P(x)$ daliklis. Padalykime $P(x)$ kampu:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 & x - 1 \\ \underline{x^4 - x^3} & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ \quad 2x^3 - x^2 + x - 2 & \\ \quad \underline{2x^3 - 2x^2} & \\ \qquad x^2 + x - 2 & \\ \qquad \underline{x^2 - x} & \\ \qquad\quad 2x - 2 & \\ \qquad\quad \underline{2x - 2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Taigi $P(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 + x + 2)$.

Dabar skaidykime daugianarį (x^3+2x^2+x+2). Jo laisvojo nario daliklis –2 yra šio daugianario šaknis. Vadinasi,

$$x^3+2x^2+x+2=(x+2)\,(x^2+px+q).$$

Koeficientus p ir q galima rasti tiek neapibrėžtųjų koeficientų metodu, tiek dalijant kampu. Taikykime dalybą kampu ir gausime:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+x+2 & x+2 \\ \hline -\;x^3+2x^2 & x^2+1 \\ \cline{1-1} x+2 & \\ -\;x+2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

ir todėl $x^3+2x^2+x+2=(x+2)\,(x^2+1)$.

Vadinasi, $P(x)=(x-1)(x+2)\,(x^2+1)$. Dabar jau visiškai aišku, kad lygtis $P(x)=0$ turi tik du sprendinius: $x=1$ ir $x=-2$.

Taigi lygtis $x^4+x^3-x^2+x-2=0$ turi du realiuosius sprendinius: $x=-2$ ir $x=1$.

Ats.: du; –2 ir 1.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Skaičiuojamą sumą pažymėkime S. Šios sumos dėmenys yra

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2}{k};\ k=1,2,3,\ldots,100.$$

Pagal pirmųjų k natūraliųjų skaičių kvadratų sumos formulę gauname:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2}{k}=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6k}=\frac{(k+1)(2(k+1)-1)}{6}=\frac{(k+1)^2}{3}-\frac{k+1}{6};$$

todėl

$$S=1+\left(\frac{3^2}{3}-\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{4^2}{3}-\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{5^2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{100^2}{3}-\frac{100}{6}\right)+$$

$$+\left(\frac{101^2}{3}-\frac{101}{6}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\left(3^2+4^2+5^2+\ldots+100^2+101^2\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\left(3+4+5+\ldots+100+101\right)=$$

$$=1+\frac{1}{3}\cdot\left(\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2+101^2\right)-\left(1^2+2^2\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\left(\left(1+2+3+\ldots+101\right)-\left(1+2\right)\right)=$$

$$=1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{101\cdot102\cdot203}{6}-5\right)-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{101\cdot102}{2}-3\right)=115\,325.$$

Ats.: 115 325.

2. Sumos dėmenis galima užrašyti formule:

$$\frac{1}{k^2-1};\ k=2,3,\ldots,99.$$

Taikant neapibrėžtųjų koeficientų metodą trupmeną $\frac{1}{k^2-1}$ galima išskaidyti paprasčiausių trupmenų suma:

$$\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Remdamiesi šiuo skaidiniu, gauname:

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\ldots+\frac{1}{98^2-1}+\frac{1}{99^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}\right)+\left(\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{98-1}-\frac{1}{98+1}\right)+\left(\frac{1}{99-1}-\frac{1}{99+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{14\,651}{19\,800}.$$

Ats.: $\frac{14\,651}{19\,800}$.

3. Skaičiuojamą sumą pažymėkime S. Šios sumos dėmenis galima užrašyti taip:

$$\underbrace{77\ldots7}_{k \text{ skaitmenų}}=7\cdot10^{k-1}+7\cdot10^{k-2}+\ldots+7\cdot10^{0};\quad k=1,2,\ldots,10.$$

Tada $S=7+(7\cdot10+7)+(7\cdot100+7\cdot10+7)+\ldots+$

$$+(7\cdot10^{9}+7\cdot10^{8}+\ldots+7\cdot10+7)=$$

$$=7\cdot(1+(10+1)+(100+10+1)+\ldots+(10^{9}+10^{8}+\ldots+10+1))=$$

$$=7\cdot(10^{9}+2\cdot10^{8}+3\cdot10^{7}+\ldots+8\cdot10^{2}+9\cdot10^{1}+10)=$$

$$=7(1\,234\,567\,890+10)=7\cdot1\,234\,567\,900=8\,641\,975\,300.$$

Ats.: 8 641 975 300.

4. Sumos S_n dėmenis $\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}$, $k=1,2,\ldots,n$, išskaidę (taikydami neapibrėžtųjų koeficientų metodą) paprasčiausiomis trupmenomis, gauname:

$$\frac{1}{(2k-1)\cdot(4k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right);$$

todėl

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

Ats.: $S_n=\frac{n}{2n+1}$.

5. Sumos S_n dėmenis

$$\frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)}, \quad k=1,2,...,n,$$

išskaidykime paprasčiausiomis trupmenomis. Gausime:

$$\frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right).$$

Tada

$$S_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+...+\left(\frac{1}{4n-7}-\frac{1}{4n-3}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}.$$

Ats.: $S_n=\dfrac{n}{4n+1}$.

6. Nagrinėkime du atvejus: 1) $n=2m$ ir 2) $n=2m-1$; $m=1,2,3,...$ Gausime:

1) $S_{2m}=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+...+(2m-1)^2-(2m)^2=$

$$=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+...+(2m-1)^2+(2m)^2)-$$

$$-2(2^2+4^2+6^2+...+(2m)^2)=$$

$$=\frac{2m(2m+1)(4m+1)}{6}-8(1^2+2^2+3^2+...+m^2)=$$

$$=\frac{m(2m+1)(4m+1)}{3}-\frac{4m(m+1)(2m+1)}{3}=$$

$$=\frac{m(2m+1)}{3}\cdot(4m+1-4(m+1))=-m(2m+1);$$

2) $S_{2m-1}=1^2-2^2+3^2-4^2+...+(2m-1)^2=$

$$=(1^2+2^2+3^2+4^2+...+(2m-1)^2)-$$

$$-2(2^2+4^2+...+(2m-2)^2)=$$

$$= \frac{(2m-1)\cdot 2m\cdot(4m-1)}{6} - 8\cdot(1^2+2^2+\ldots+(m-1)^2) =$$

$$= \frac{(2m-1)m(4m-1)}{3} - \frac{4(m-1)m(2m-1)}{3} =$$

$$= \frac{m(2m-1)}{3}(4m-1-4(m-1)) = m(2m-1).$$

Pirmuoju atveju gauname $m = \frac{n}{2}$, o antruoju $m = \frac{n+1}{2}$, todėl

$$S_{2m} = S_n = -\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_{2m-1} = S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Abi sumos formules galima sujungti į vieną:

$$S_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ats.: $S_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$.

7. Skaičiuojamą sumą pažymėkime S_n. Jos dėmenis $\frac{k+6}{k(k+2)(k+3)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) išskaidykime paprasčiausiomis trupmenomis taikydami neapibrėžtųjų koeficientų metodą:

$$\frac{k+6}{k(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} + \frac{C}{k+3}.$$

Ši lygybė galios tik tada, kai

$$k+6 = A(k+2)(k+3) + Bk(k+3) + Ck(k+2).$$

Atlikę veiksmus, turėsime lygybę

$$k+6 = (A+B+C)k^2 + (5A+3B+2C)k + 6A.$$

Toliau sudarome ir išsprendžiame tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ 5A+3B+2C=1, \\ 6A=6. \end{cases}$$

Gauname tokias koeficientų A, B ir C reikšmes:

$$A = 1,\ B = -2,\ C = 1.$$

Taigi

$$\frac{k+6}{k(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3}.$$

Tada

$$S_n = \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{7}{6} - \frac{n^2+6n+7}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Ats.: $\dfrac{7}{6} - \dfrac{n^2+6n+7}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

8.1. Kai $n = 1$, turime vieną dėmenį $1 \cdot 2 \cdot 3$. Trupmenos

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

reikšmė su $n = 1$ yra lygi šiam dėmeniui. Taigi formulė galioja su $n = 1$.

Tarkime, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi k yra teisinga formulė

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

Tada

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k}{4}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

Tokį pat rezultatą gautume įrašę $n = k+1$ trupmenoje $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Vadinasi, įrodomoji formulė galioja su $n = k+1$, jeigu galioja su $n = k$.

Pagal matematinės indukcijos principą formulė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n.

8.2. Kairiąją formulės pusę pažymėkime S_n. Aišku, kad

$$S_1 = \frac{1(1+1)}{2(2\cdot 1+1)},$$

nes

$$S_1 = \frac{1^2}{1\cdot 3}.$$

Tarkime, kad

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi k. Tada gauname:

$$S_{k+1} = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= S_k + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2k+3}\right) = \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Formulė galioja su $n = k+1$, kai ji galioja su $n = k$.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, kad formulė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n.

8.3. Tegu

$$S_n = 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \ldots + n(3n+1).$$

Kai $n=1$, turime: $S_n = 1\cdot 4 = 4$ ir $n(n+1)^2 = 4$. Taigi formulė galioja su $n=1$.

Tarkime, kad $S_k = k(k+1)^2$ su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi *k*. Tada skaičiuodami sumą S_{k+1} gauname:

$$S_{k+1} = 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \ldots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) =$$
$$= S_k + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) =$$
$$= (k+1)(k(k+1) + (3k+4)) = (k+1)(k^2 + 4k + 4) =$$
$$= (k+1)(k+2)^2.$$

Matome, kad įrodomoji formulė galioja su $n = k+1$, kai ji galioja su $n = k$.

Pagal matematinės indukcijos principą formulė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais *n*.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $\lg^3(0{,}25x^2) = 8\lg(0{,}5x) \Rightarrow \lg^3(0{,}5x)^2 = 8\lg(0{,}5x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\lg^3(0{,}5x) = 8\lg(0{,}5x) \Rightarrow \lg(0{,}5x)(\lg^2(0{,}5x) - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lg(0{,}5x) = 0$ arba $\lg(0{,}5x) = -1$, arba $\lg(0{,}5x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}5x = 1$ arba $0{,}5x = 0{,}1$, arba $0{,}5x = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$ arba $x = 0{,}2$, arba $x = 20$.

Ats.: 0,2; 2; 20.

2. Pertvarkykime kairiąją lygties pusę:

$$1 + \log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 8 + \ldots + \log_x 2^{99} =$$
$$= 1 + \log_x 2 + 2\log_x 2 + 3\log_x 2 + \ldots + 99\log_x 2 =$$
$$= 1 + (1+2+3+\ldots+99)\log_x 2 = 1 + \frac{(1+99)\cdot 99}{2}\log_x 2 =$$
$$= 1 + 4950\log_x 2.$$

Toliau spręskime lygtį $1+4950\log_x 2 = 2\log_2 x$:

$$\begin{cases} t=\log_2 x, \\ 1+4950\cdot\dfrac{1}{t}=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\log_2 x, \\ \dfrac{2t^2-t-4950}{t}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\log_2 x, \\ t=\dfrac{1\pm 199}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\log_2 x, \\ t=-49{,}5 \text{ arba } t=50 \end{cases} \Rightarrow x=2^{-49{,}5} \text{ arba } x=2^{50}.$$

Ats.: $2^{-49{,}5}$, 2^{50}.

3. $3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9 \Rightarrow \log_3\left(3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}\right)=\log_3 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_x 3+\log_3^2 x=2 \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x}+\log_3^2 x=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\log_3 x, \\ \dfrac{t^3-2t+1}{t}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\log_3 x, \\ \dfrac{(t-1)(t^2+t-1)}{t}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\log_3 x, \\ t=1 \text{ arba } t^2+t-1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\log_3 x, \\ t=1 \text{ arba } t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \text{ arba } t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ arba } x=3^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}, \text{ arba } x=3^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ats.: 3, $3^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$, $3^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

4. Iš pradžių pertvarkykime kairėje pusėje parašytą reiškinį:

1) $$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{(\sqrt{x+1}+1)-(\sqrt{x+1}-1)}{(x+1)-1}=\frac{2}{x};$$

2) $x^{0{,}5\left(\log_2 x^2\right)^2-7}=x^{2\log_2^2 x-7}$.

Toliau gausime:

$$\frac{2}{x}\cdot x^{2\log_2^2 x-7}=2x^8 \Rightarrow x^{2\log_2^2 x-8}=x^8 \Rightarrow \begin{cases}2\log_2^2 x-8=8,\\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\log_2^2 x=8,\\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_2 x=-2\sqrt{2} \quad \text{arba} \quad \log_2 x=2\sqrt{2},\\ x\neq 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2^{-2\sqrt{2}} \quad \text{arba} \quad x=2^{2\sqrt{2}} \Rightarrow x=4^{-\sqrt{2}} \quad \text{arba} \quad x=4^{\sqrt{2}}.$$

Ats.: $4^{-\sqrt{2}}$, $4^{\sqrt{2}}$.

5. $$\begin{cases}\log_{xy}(x^2-y^2)=1,\\ \log_{xy}(x-y)=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-y^2=xy,\\ x-y=1,\\ xy>0,\ xy\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=xy,\\ x-y=1,\\ xy>0,\ xy\neq 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}y=x-1,\\ x+(x-1)=x(x-1),\\ x(x-1)>0,\\ x(x-1)\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x-1,\\ x^2-3x+1=0,\\ x<0 \ \text{arba} \ x>1,\\ x^2-x-1\neq 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}y=x-1,\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\\ x<0 \ \text{arba} \ x>1,\\ x\neq \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$$

Ats.: $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

6. $\log_x(x+2) > 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2 < x^2, \\ x+2 > 0, \\ 0 < x < 1 \end{cases}$ arba $\begin{cases} x+2 > x^2, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x > -2, \\ 0 < x < 1 \end{cases}$ arba $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ arba } x > 2, \\ 0 < x < 1 \end{cases}$ arba $\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$.

Intervalo (1; 2) ilgis yra $2 - 1 = 1$.

Ats.: 1.

7. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1-\dfrac{\log_2 x}{2}}{1+\log_2 x} - \dfrac{1}{2} \le 0 \Rightarrow \dfrac{2-\log_2 x}{2(1+\log_2 x)} - \dfrac{1}{2} \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1-2\log_2 x}{2(1+\log_2 x)} \le 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2\log_2 x \le 0, \\ 1+\log_2 x > 0 \end{cases}$ arba $\begin{cases} 1-2\log_2 x \ge 0, \\ 1+\log_2 x < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x \ge \dfrac{1}{2}$ arba $\log_2 x < -1 \Rightarrow x \ge \sqrt{2}$ arba $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

Ats.: $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

8. $\dfrac{\log_2 \dfrac{x}{4} \cdot \log_2 4x}{\log_2 2x} < 2{,}4 \Rightarrow \dfrac{(\log_2 2x - 3)(1+\log_2 2x)}{\log_2 2x} - \dfrac{12}{5} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{5\log_2^2 2x - 10\log_2 2x - 15 - 12\log_2 2x}{5\log_2 2x} < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{5\log_2^2 2x - 22\log_2 2x - 15}{5\log_2 2x} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\log_2 2x + 0{,}6)(\log_2 2x - 5)}{\log_2 2x} < 0 \Rightarrow$$

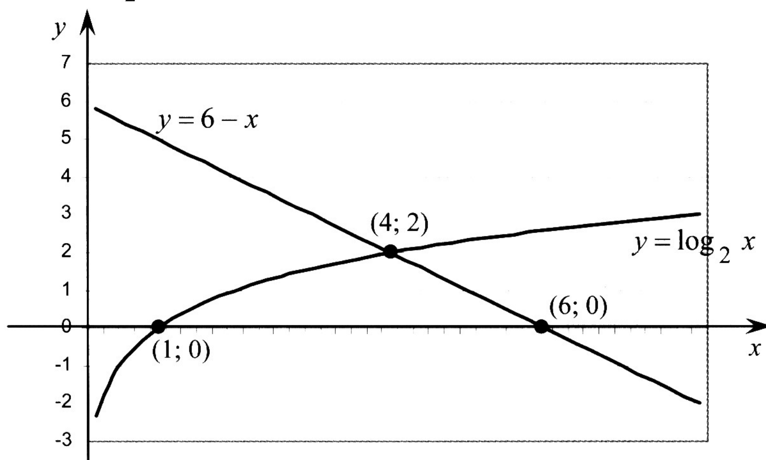
$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 2x < 0, \\ \log_2 2x + 0{,}6 < 0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} \log_2 2x > 0, \\ \log_2 2x - 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 2x < -0{,}6 \ \text{arba}\ 0 < \log_2 2x < 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x < 2^{-1,6} \ \text{arba}\ \frac{1}{2} < x < 16.$$

Ats.: $(0; 2^{-1,6}) \cup (0{,}5; 16)$.

9. Lygties apibrėžimo sritis yra intervalas $(0; +\infty)$. Šiame intervale lygtis $\log_2 x = 6 - x$ yra ekvivalenti lygčių sistemai



1 pav.

$$\begin{cases} y = \log_2 x, \\ y = 6 - x. \end{cases} \qquad (1)$$

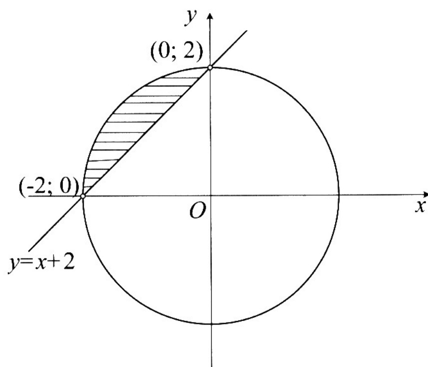
Šios sistemos sprendiniai yra tiesės $y = 6 - x$ ir kreivės $y = \log_2 x$ susikirtimo taškų (taško) koordinatės. Iš grafikų matyti (žr. 1 pav.), kad tiesė $y = 6 - x$ su kreive $y = \log_2 x$ susikerta vieninteliame taške (4; 2). Lengva patikrinti, kad pora (4; 2) tenkina (1) sistemą. Taigi lygtis $\log_2 x = 6 - x$ turi vienintelį sprendinį $x = 4$.

10. Iš pradžių pertvarkykime nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} 2^{x^2+y^2} \le 16, \\ \lg y \ge \log_{0,1} \dfrac{1}{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2+y^2} \le 2^4, \\ \lg y \ge \lg(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge x + 2, \\ x > -2. \end{cases} \qquad (2)$$

Pavaizduokime (stačiakampėje Dekarto koordinačių plokštumoje) (2) sistemos sprendinių $(x; y)$ aibę. Šios aibės geometrinis vaizdas yra skritulio nuopjova (2 pav. ji užbrūkšniuota) be taškų (–2; 0) ir (0; 2). Tegu S yra nuopjovos plotas. Kadangi skritulio centras yra (0; 0), o spindulys lygus 2, tai

$$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \pi - 2$$



2 pav.

Ats.: $\pi - 2$.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

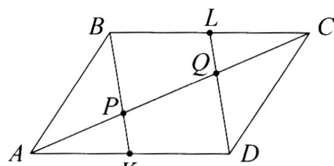
1. Pasirinkime afiniąją koordinačių sistemą (A, D, B). Tada taškų A, D ir B koordinatės yra: $A(0;0)$, $D(1;0)$, $B(0;1)$ (*žr.* 1 pav.), o taškų C, K ir L koordinatės yra $C(1;1)$, $K\left(\frac{1}{2};0\right)$, $L\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Rašome tiesių AC, BK ir LD lygtis:

$$AC\colon\ x-y=0, \qquad BK\colon\ 2x+y-1=0, \qquad LD\colon\ 2x+y-2=0.$$

Tiesių BK ir AC susikirtimo taško P koordinates randame iš sistemos

$$\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x-y=0, \end{cases}$$



1 pav.

o tiesių LD ir AC susikirtimo taško Q – iš sistemos

$$\begin{cases} 2x+y-2=0, \\ x-y=0, \end{cases}$$

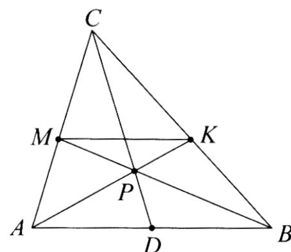
Taigi taškų P ir Q koordinatės yra: $P\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Apskaičiuojame vektorių $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ ir $\overrightarrow{AC}$ koordinates: $\overrightarrow{AP}\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$, $\overrightarrow{AQ}\left\{\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$, $\overrightarrow{AC}\{1;1\}$. Matome, kad $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Vadinasi, $AP=PQ=QC$.

2. Sakykime, kad (A, B, C) – afinioji koordinačių sistema. Tada taškų A, B, C ir D koordinatės yra:

$$A(0;0),\quad B(1;0),\quad C(0;1),\quad D\left(\frac{1}{2};0\right)$$

(*žr.* 2 pav.).



2 pav.

Šioje koordinačių sistemoje tiesės BC lygtis yra $x+y-1=0$, tiesės AC lygtis – $x=0$, o tiesės CD lygtis yra $\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{-1}$, arba $2x+y-1=0$. Kadangi taškas P yra tiesėje CD, tai jo koordinatės $(\alpha, 1-2\alpha)$. Rašome tiesių AP ir BP lygtis:

AP: $(1-2\alpha)x-\alpha y=0$; BP: $(1-2\alpha)x+(1-\alpha)y-1+2\alpha=0$.

Išsprendę sistemas

$$\begin{cases}(1-2\alpha)x-\alpha y=0,\\ x+y-1=0\end{cases} \text{ ir } \begin{cases}(1-2\alpha)x+(1-\alpha)y-1+2\alpha=0,\\ x=0,\end{cases}$$

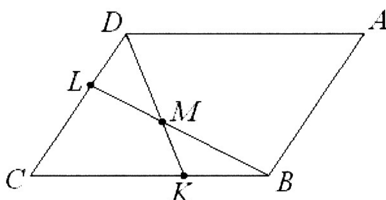
randame taškų K ir M koordinates: $K\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}; \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\right)$, $M\left(0; \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\right)$. Vektorius $\overrightarrow{KM}\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}; 0\right\}$ yra kolinearus su tiese AB. Taigi $KM \parallel AB$.

3. Pasirinkime koordinačių sistemą (C, B, D) (3 pav.). Tada taškų C, B ir D koordinatės yra: $C(0;0)$, $B((1;0)$, $D(0;1)$. Akivaizdu, kad $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{CL}=\frac{5}{8}\overrightarrow{CD}$; todėl taškų K ir L koordinatės yra $K\left(\frac{3}{5}; 0\right)$, $L\left(0; \frac{5}{8}\right)$. Tiesių BL ir DK lygtys yra atitinkamai tokios: $5x+8y-5=0$, $5x+3y-3=0$. Taško M koordinates $\left(\frac{9}{25}; \frac{2}{5}\right)$ randame išsprendę lygčių sistemą

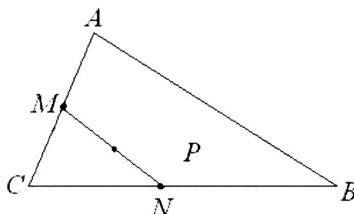
$$\begin{cases}5x+8y-5=0,\\ 5x+3y-3=0.\end{cases}$$

Apskaičiuojame vektorių $\overrightarrow{DM}$ ir $\overrightarrow{MK}$ koordinates:

$\overrightarrow{DM}\left\{\frac{9}{25}; -\frac{3}{5}\right\}$ ir $\overrightarrow{MK}\left\{\frac{6}{25}; -\frac{2}{5}\right\}$. Kadangi $\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MK}$, tai $DM : MK = 3 : 2$.



3 pav.



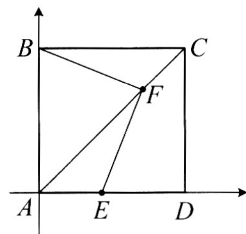
4 pav.

4. Pasirinkime afiniąją koordinačių sistemą (C, A, B) (4 pav.) ir sakykime, kad $\frac{CM}{MA} = \lambda$, $\lambda > 0$. Tuomet pagal uždavinio sąlygą $\frac{CN}{NB} = \frac{1}{\lambda}$. Kadangi $\overrightarrow{CM} = \lambda\,\overrightarrow{MA} = \lambda(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM})$, tai $\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda\,\overrightarrow{CA}}{1+\lambda}$ ir pasirinktajame reperyje taško M koordinatės yra $\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}; 0\right)$, o taško N koordinatės yra $\left(0; \frac{1}{1+\lambda}\right)$. Analogiškai $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{NB} = \frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CN})$ ir $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{CB}$. Atkarpos MN vidurio taško P koordinatėms $(x; y)$ teisingos lygybės $x = \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}$, $y = \frac{1}{2(1+\lambda)}$.

Iš jų eliminavę λ (t. y. abi lygybes sudėję), gauname $x + y = \frac{1}{2}$.

Tai tiesės, kuri koordinačių ašis kerta taškuose $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ ir $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, lygtis. Kadangi šie taškai yra kraštinių CA ir CB vidurio taškai, tai ieškomoji taškų aibė yra trikampio ABC vidurio linija, lygiagreti su kraštine AB.

5. Stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą pasirinkime taip, kad jos pradžia sutaptų su kvadrato viršūne A, o ašys eitų kvadrato kraštinėmis – tiesės AD ir AB (5 pav.). Jei kvadrato kraštinės ilgis a, tai jo viršūnių koordinatės yra: $A(0; 0)$, $B(0; a)$, $C(a; a)$, $D(a; 0)$, o taško E koordinatės yra $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$. Kadangi tiesės AC lygtis yra $x - y = 0$, o taškas F yra atkarpoje AC ir $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, tai taško F koordinatės yra $\left(\frac{3a}{4}; \frac{3a}{4}\right)$.



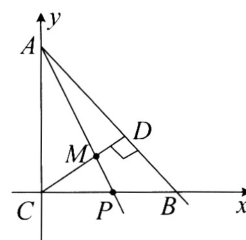
5 pav.

Tiesės EF lygtis yra $3x - y - \frac{3a}{2} = 0$, o tiesės BF lygtis – $x + 3y - 3a = 0$. Tiesės EF ir BF statmenos, nes $3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$.

6. Pasirinkime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą taip, kad jos pradžios taškas būtų trikampio viršūnė C, o trikampio statiniai būtų koordinačių ašyse (6 pav.). Sakykime, kad $CB = b$, $AC = a$. Tada taškų C, B ir A koordinatės yra: $C(0; 0)$, $B(b; 0)$, $A(0; a)$, o tiesės AB lygtis yra $ax + by - ab = 0$. Jai statmena tiesė CD eina per koordinačių pradžią, todėl jos lygtis $bx - ay = 0$. Iš sistemos

$$\begin{cases} ax + by - ab = 0, \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

randame taško D koordinates: $\left(\frac{a^2 b}{a^2 + b^2}; \frac{ab^2}{a^2 + b^2}\right)$. Tuomet atkarpos



6 pav.

CD vidurio taško M koordinatės yra $\left(\frac{a^2 b}{2(a^2 + b^2)}; \frac{ab^2}{2(a^2 + b^2)}\right)$.

Tiesės AM lygtis yra

$$(2a^2+b^2)x+aby-a^2b=0.$$

Tiesė AM kerta tiesę BC (jos lygtis $y=0$) taške $P\left(\dfrac{a^2b}{2a^2+b^2};0\right)$.

Taigi

$$CP=\frac{a^2b}{2a^2+b^2},\quad PB=b-\frac{a^2b}{2a^2+b^2}=\frac{a^2b+b^3}{2a^2+b^2}=\frac{b(a^2+b^2)}{2a^2+b^2}.$$

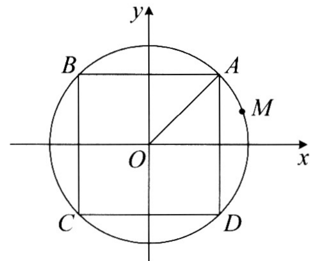
Iš čia

$$\frac{CP}{PB}=\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{AC^2}{AB^2}=\cos^2 A.$$

7. Pasirinkime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą taip, kad jos pradžios taškas būtų apskritimo centre, o ašys lygiagrečios su kvadrato kraštinėmis (7 pav.). Jei kvadrato kraštinės ilgis lygus 2a, tai jo kraštinių lygtys yra: AB: $y=a$, BC: $x=-a$, CD: $y=-a$, AD: $x=a$. Apskritimo spindulys $OA=\sqrt{2}a$, tai bet kuriam apskritimo taškui $M(x_0;y_0)$ teisinga lygybė $x_0^2+y_0^2=2a^2$. Akivaizdu, kad atstumai nuo taško M iki tiesių AB, BC, CD ir AD atitinkamai lygūs $|y_0-a|$, $|x_0+a|$, $|y_0+a|$ ir $|x_0-a|$ (*žr.* (7) 48 psl.). Tuomet jų kvadratų suma

$$(y_0-a)^2+(x_0+a)^2+(y_0+a)^2+$$
$$+(x_0-a)^2=2x_0^2+2y_0^2+4a^2=$$
$$=2(x_0^2+y_0^2)+4a^2=2\cdot 2a^2+4a^2=8a^2$$

yra pastovi visiems apskritimo taškams.



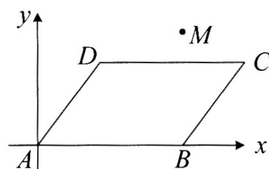
7 pav.

8. Stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą pasirinkime taip, kad lygiagretainio viršūnė A būtų koordinačių pradžia, o abscisių ašis būtų tiesėje AB (8 pav.). Jei $AB=a$, tai lygiagretainio viršūnių A ir B koordinatės yra: $A(0;0)$, $B(a;0)$. Sakykime, kad taško D

koordinatės yra $(b;c)$. Tuomet iš lygybės $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ išplaukia, kad taško C koordinatės yra $(a+b;c)$. Jei $M(x;y)$ – bet kuris plokštumos taškas, tai $MA^2=x^2+y^2$, $MB^2=(x-a)^2+y^2$,

$MC^2=(x-a-b)^2+(y-c)^2$,

$MD^2=(x-b)^2+(y-c)^2$.



8 pav.

Tuomet

$MA^2-MB^2+MC^2-MD^2=$

$=x^2+y^2-x^2+2ax-a^2-y^2+x^2-$

$-2ax-2bx+2ab+a^2+$

$+b^2+y^2-2cy+c^2-x^2+2bx-b^2-y^2+2cy-c^2=2ab$. Taigi nagrinėjamasis reiškinys nepriklauso nuo taško M pasirinkimo.

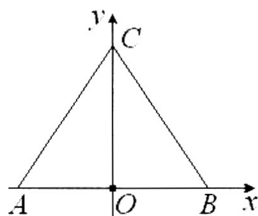
9. Stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą parenkame taip, kad trikampio viršūnės A ir B būtų abscisių ašyje, o viršūnė C – ordinačių ašyje (9 pav.). Sakykime, kad trikampio kraštinės ilgis lygus $2a$. Tada taškų A ir B koordinatės yra $A(-a;0)$, $B(a;0)$. Iš trikampio OBC randame OC:

$$OC^2=BC^2-OB^2=4a^2-a^2=3a^2\Rightarrow OC=\sqrt{3}a.$$

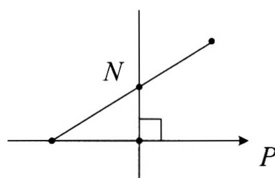
Taigi taško C koordinatės yra $(0;\sqrt{3}a)$. Jei taškas $M(x;y)$ priklauso nagrinėjamai taškų aibei, tai $AM^2+BM^2=CM^2$. Kadangi

$$AM^2=(x+a)^2+y^2,$$
$$BM^2=(x-a)^2+y^2,$$
$$CM^2=x^2+(y-a\sqrt{3})^2,$$

tai gauname $(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=x^2+(y-a\sqrt{3})^2$, o iš čia $x^2+y^2+2\sqrt{3}ay-a^2=0$, arba $x^2+(y+\sqrt{3}a)^2=4a^2$. Tai lygtis apskritimo, kurio centras $Q(0;-\sqrt{3}a)$ yra simetriškas taškui C tiesės AB atžvilgiu, o spindulys lygus $2a$, t. y. lygus trikampio kraštinei.



9 pav.



10 pav.

10. Pasirinkime polinę koordinačių sistemą taip, kad polius būtų taške O, o polinė ašis – statmena tiesei l (10 pav.). Taškas N šioje koordinačių sistemoje turi koordinates $N(r, \varphi)$; čia $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$.

Kadangi $OM \cdot ON = b^2$, tai $OM = \dfrac{b^2}{ON} = \dfrac{b^2 \cos\varphi}{a}$. Taigi taško M koordinatės yra $\left(\dfrac{b^2 \cos\varphi}{a}; \varphi\right)$. Jis priklauso apskritimui, kurio centras $\left(\dfrac{b^2}{2a}; 0\right)$, o spindulys $\dfrac{b^2}{2a}$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Palankių įvykiui A vienodai galimų baigčių yra 30 (tiek tarp skaičių 00, 01, 02, ..., 99 yra tokių, kurių pirmasis skaitmuo yra mažesnis už 3). Palankių įvykiui B baigčių yra 40 (tiek yra skaičių su antruoju skaitmeniu, mažesniu už 4). Tuomet

$$P(A) = \frac{30}{100},\ P(B) = \frac{40}{100},\ P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{60}{100}.$$

Pagal įvykių sąjungos tikimybės formulę:

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}).$$

Kadangi skaičių, kurių pirmasis skaitmuo yra mažesnis už 3, o antrasis – ne mažesnis kaip 4, yra 18, tai $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{18}{100}$. Tuomet

$$P(A \cup \overline{B}) = \frac{30}{100} + \frac{60}{100} - \frac{18}{100} = \frac{72}{100} = 0{,}72.$$

Ats.: 0,72

2. Tegu A – įvykis, kad verslininkas gaus pelną iš pirmosios įmonės, B – kad jis gaus pelną iš antrosios įmonės. Tuomet $A \cup B$ yra įvykis, kad verslininkas gaus pelną bent iš vienos įmonės. Iš sąlygos: $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}8$, $P(\overline{A}) = 0{,}3$, $P(\overline{B}) = 0{,}2$. Pagal įvykių sąjungos tikimybės formulę:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$, nes įvykiai A ir B – nepriklausomi. Taigi $P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$.

b) Įvykį, kad verslininkas gaus pelną tik iš vienos įmonės, galima užrašyti taip: $C = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Kadangi įvykiai $A \cap \overline{B}$ ir $\overline{A} \cap B$ yra nesutaikomi, tai

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B).$$

Kadangi įvykiai A ir $\overline{B}$ taip pat $\overline{A}$ ir B yra nepriklausomi, tai

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14,$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24.$$

Taigi $P(C) = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38$.

Ats.: a) 0,94; b) 0,38.

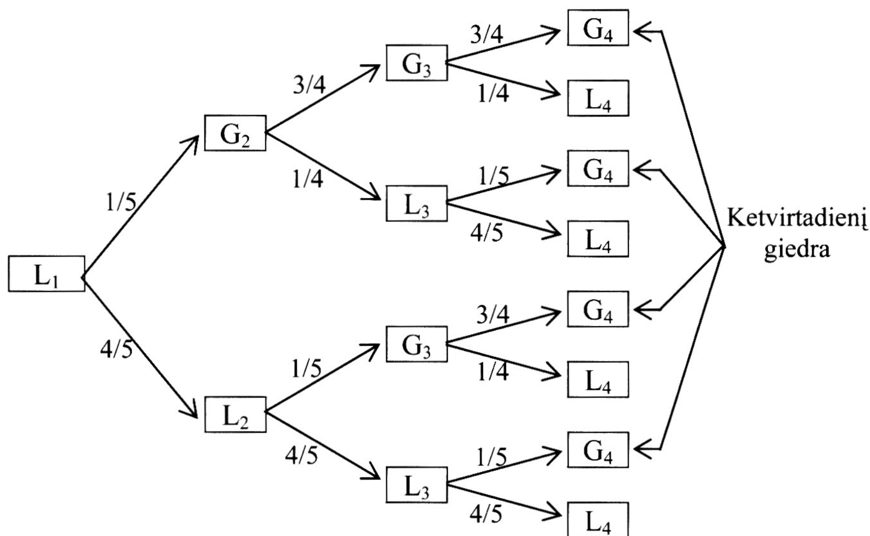
3. Pažymėkime įvykius raidėmis G_i ir L_i, $i = 1, 2, 3, 4$, atitinkamai, kad i-dienį bus giedra ir kad i-dienį bus lietinga. Pavaizduokime uždavinį tikimybių medžiu (žr. 1 pav.).
Kadangi

$$P_{G_i}(G_{i+1}) = \frac{3}{4},\ P_{G_i}(L_{i+1}) = \frac{1}{4},\ P_{L_i}(L_{i+1}) = \frac{4}{5},\ P_{L_i}(G_{i+1}) = \frac{1}{5},$$

tai gauname:

$$P(G_4) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{9}{80} + \frac{1}{100} + \frac{12}{100} + \frac{16}{125} = \frac{741}{2000} = 0{,}3705.$$



1 pav.

Ats.: 0,3705.

4. Tegu S – įvykis, kad atsitiktinai sutiktas Savijos gyventojas bus šviesiaplaukis, o M – kad atsitiktinai sutiktas Savijos gyventojas bus mėlynakis. Pagal sąlygą $P(S) = 0{,}4$, $P(M) = 0{,}5$, $P(S \cap M) = 0{,}35$. Reikia apskaičiuoti sąlyginę tikimybę $P_S(M)$. Pagal sąlyginės tikimybės formulę

$$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0{,}35}{0{,}4} = 0{,}875.$$

Ats.: 0,875.

5. Pažymėkime A įvykį, kad pirmasis pagal sąrašą mokinys ištrauks Romui žinomą klausimą, B – kad antrasis mokinys ištrauks Romui žinomą klausimą, C – kad Romas (traukdamas bilietą trečias) ištrauks jam žinomą klausimą. Pagal sąlygą $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Taigi, jei Romas trauktų bilietą pirmas, tikimybė, kad jam klius žinomas bilietas, yra $\frac{3}{5}$.

Kai Romas traukia bilietą trečias, pagal pilnosios tikimybės formulę turėsime:

$$P(C) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(C) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(C) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(C) + \\ + P(H_4) \cdot P_{H_4}(C);$$

čia $H_1 = A \cap B$, $H_2 = \overline{A} \cap B$, $H_3 = A \cap \overline{B}$, $H_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$, o $P_{H_i}(C)$ – atitinkamos sąlyginės tikimybės. Apskaičiuokime tikimybes $P(H_i)$:

$$P(H_1) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{132}{380};$$

$$P(H_2) = P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{96}{380};$$

$$P(H_3) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{96}{380};$$

$$P(H_4) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{56}{380}.$$

Sąlyginės tikimybės $P_{H_i}(C)$ yra:

$$P_{H_1}(C) = \frac{10}{18};\ P_{H_2}(C) = \frac{11}{18};\ P_{H_3}(C) = \frac{11}{18};\ P_{H_4}(C) = \frac{12}{18}.$$

Tuomet

$$P(C) = \frac{132}{380} \cdot \frac{10}{18} + \frac{96}{380} \cdot \frac{11}{18} + \frac{96}{380} \cdot \frac{11}{18} + \frac{56}{380} \cdot \frac{12}{18} = \\ = \frac{1320 + 1056 + 1056 + 672}{6840} = \frac{4104}{6840} = \frac{3}{5}.$$

Ats.: $\frac{3}{5}$; tikimybės lygios.

6. Pažymėkime D_i – įvykį, kad pasirinkta i-oji dėžė. Pagal sąlygą

$$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3}.$$

Tegu A – įvykis, kad iš atsitiktinai pasirinktos dėžės atsitiktinai išimta standartinė detalė, o grąžinus ją atgal, vėl atsitiktinai paimta standartinė detalė. Tuomet atitinkamos sąlyginės tikimybės tokios:

$$P_{D_1}(A)=1;\ P_{D_2}(A)=\frac{15}{20}\cdot\frac{15}{20}=\frac{9}{16};\ P_{D_3}(A)=\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20}=\frac{1}{4}.$$

Pagal Bejeso formules:

$$P_A(D_3)=\frac{P(D_3)\cdot P_{D_3}(A)}{P(D_1)\cdot P_{D_1}(A)+P(D_2)\cdot P_{D_2}(A)+P(D_3)\cdot P_{D_3}(A)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\left(1+\frac{9}{16}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{29}.$$

Ats.: $\frac{4}{29}$.

7. Pažymėkime H_1 –įvykį iš pirmosios dėžės atsitiktinai paimti du baltus rutuliukus, H_2 – iš pirmosios dėžės paimti 1 baltą ir 1 juodą rutuliuką, H_3 –iš pirmosios dėžės paimti abu juodus rutuliukus. Tegu B įvykis, kad iš antrosios dėžės ištrauktas baltas rutuliukas (sąlygoje nurodytu būdu). Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$P(B)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(B)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(B)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(B).$$

Kadangi

$$P(H_1)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4}=\frac{3}{10},\qquad P_{H_1}(B)=\frac{6}{10},$$

$$P(H_2)=\frac{3\cdot 2}{C_5^2}=\frac{6}{10},\qquad P_{H_2}(B)=\frac{5}{10},$$

$$P(H_3)=\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10},\qquad P_{H_3}(B)=\frac{4}{10},$$

tai

$$P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{18+30+4}{100}=0{,}52.$$

Ats.: 0,52.

8. Pažymėkime V – įvykį, kad atsitiktinai atrinktas darbuotojas bus vyras, M – kad atsitiktinai atrinktas darbuotojas bus moteris. Tegu J – įvykis, kad atsitiktinai atrinkto darbuotojo amžius neviršija 25 metų. Pagal sąlygą duotos tikimybės

$$P(M)=\frac{120}{160}=\frac{3}{4},\ P(V)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},\ P_V(J)=0{,}125.$$

Reikia apskaičiuoti tikimybę $P(V\cap J)$.

Pagal priklausomų įvykių sankirtos tikimybės formulę

$$P(V\cap J)=P(V)\cdot P_V(J)=\frac{1}{4}\cdot 0{,}125=\frac{1}{32}.$$

Ats.: $\frac{1}{32}$.

9. Pažymėkime A – įvykį, kad krepšininkas pataikys baudos metimą; $P(A)=0{,}9$. Tegu B – įvykis, kad krepšininkas pataikys antrąjį baudos metimą. Tuomet pagal sąlygą

$$P_A(B)=0{,}8,\ P_{\overline{A}}(B)=0{,}75.$$

Prašoma apskaičiuoti tikimybę

$$P=P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B).$$

Iš pradžių pritaikę nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybės, o po to – priklausomų įvykių sankirtos tikimybės formules, gausime:

$$P=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A)\cdot P_A(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)=$$
$$=0{,}9\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}75=0{,}18+0{,}075=0{,}255.$$

Ats.: 0,255.

10. Pažymėkime H_1 – įvykį, kad pro degalinę važiuos sunkvežimis, H_2 – kad pro degalinę važiuos lengvasis automobilis, A – įvykį, kad automobilis užsuks prisipilti degalų. Pagal sąlygą

$$P(H_1)=0{,}6\quad P(H_2)=0{,}4,\ P_{H_1}(A)=0{,}1,\ P_{H_2}(A)=0{,}2.$$

Sąlyginę tikimybę $P_A(H_1)$ apskaičiuosime pagal Bejeso formulę:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}=$$

$$= \frac{0{,}6\cdot 0{,}1}{0{,}6\cdot 0{,}1 + 0{,}4\cdot 0{,}2} = \frac{0{,}06}{0{,}14} = \frac{3}{7}.$$

Ats.: $\frac{3}{7}$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

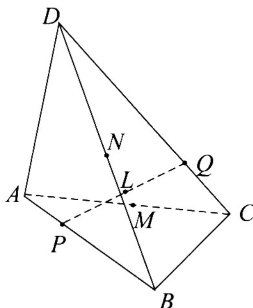
1. Sakykime, kad taškai M, N ir L yra atkarpų AC, BD ir PQ vidurio taškai. Pažymėkime $AP:PB = CQ:QD = l$ (1 pav.). Pagal 3 teoremą turime: $\vec{AQ} = \frac{\vec{AC} + l\,\vec{AD}}{1+l}$, $\vec{AP} = \frac{l}{1+l}\vec{AB}$, todėl

$$\vec{ML} = \vec{AL} - \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AP} + \vec{AQ}) - \frac{1}{2}\vec{AC} =$$

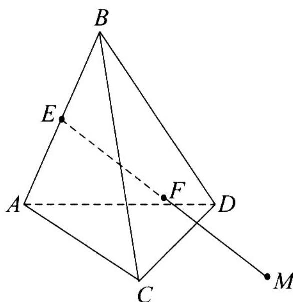
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{l\,\vec{AB} + \vec{AC} + l\,\vec{AD}}{1+l} - \frac{1}{2}\vec{AC} =$$

$$= \frac{l}{2(1+l)}\vec{AB} - \frac{l}{2(1+l)}\vec{AC} + \frac{l}{2(1+l)}\vec{AD} =$$

$$= \frac{l}{2(1+l)}(\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AD}).$$



1 pav .



2 pav.

Kita vertus,

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) - \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AD}).$$

Sugretinę $\vec{ML}$ ir $\vec{MN}$ išraiškas, gauname, kad $\vec{ML} = \frac{l}{1+l}\vec{MN}$.

Vadinasi, vektoriai $\vec{ML}$ ir $\vec{MN}$ kolinearūs, todėl taškai M, L, N yra vienoje tiesėje.

2. Kadangi taškai A, C, D ir M yra vienoje plokštumoje, o vektoriai $\vec{AC}$ ir $\vec{AD}$ nekolinearūs, tai egzistuoja tokie skaičiai x ir y, kad $\vec{AM} = x\vec{AC} + y\vec{AD}$. Bet $\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{EM}$, o $\vec{EM} \parallel \vec{EF}$; todėl egzistuoja toks skaičius z, kad $\vec{EM} = z\vec{EF}$. Kadangi $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE}$, o $\vec{AF} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$, tai

$$\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{EM} = \vec{AE} + z\vec{EF} =$$
$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + z\left(\frac{1}{3}\left(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}\right) - \frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{6}\right)\vec{AB} + \frac{z}{3}\vec{AC} + \frac{z}{3}\vec{AD}.$$

Pagal 2 teoremą abi vektoriaus $\vec{AM}$ išraiškos nekomplanariais vektoriais $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ir $\vec{AD}$ sutampa, todėl $\frac{1}{2} - \frac{z}{6} = 0$, $\frac{z}{3} = x$, $\frac{z}{3} = y$. Iš čia $z = 3$, $x = y = 1$. Taigi $\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{AD}$.

3. Sakykime, kad tiesė DL kerta plokštumą, einančią per taškus K, M ir N taške P (3 pav.) ir $DP : PL = x$. Vektorių $\vec{DP}$ išreikškime nekomplanariais vektoriais $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ ir $\vec{DC}$. Kadangi $DP : PL = x$,

tai $\vec{DP}=\frac{x}{x+1}\vec{DL}=\frac{x}{3(x+1)}(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC})$. Kita vertus, $\vec{DP}=\vec{DM}+\vec{MP}$. Taškai M, N, P ir K yra vienoje plokštumoje, o vektoriai $\vec{MK}$ ir $\vec{MN}$ nekolinearūs, todėl $\vec{MP}=y\vec{MK}+z\vec{MN}$. Bet $\vec{MK}=\vec{DK}-\vec{DM}=\frac{3}{5}\vec{DC}-\frac{1}{3}\vec{DA}$, $\vec{MN}=\vec{DN}-\vec{DM}=\frac{1}{4}\vec{DB}-\frac{1}{3}\vec{DA}$.
Vadinasi,

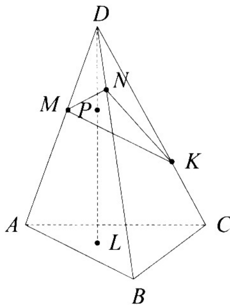
$$\vec{MP}=y\left(\frac{3}{5}\vec{DC}-\frac{1}{3}\vec{DA}\right)+z\left(\frac{1}{4}\vec{DB}-\frac{1}{3}\vec{DA}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)\vec{DA}+\frac{z}{4}\vec{DB}+\frac{3y}{5}\vec{DC}$$

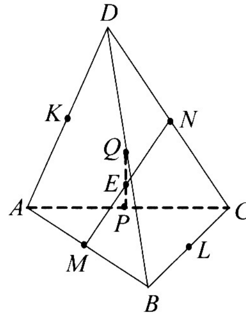
ir

$$\vec{DP}=\frac{1}{3}\vec{DA}+\left(-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)\vec{DA}+\frac{z}{4}\vec{DB}+\frac{3y}{5}\vec{DC}=$$

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{y}{3}-\frac{z}{3}\right)\vec{DA}+\frac{z}{4}\vec{DB}+\frac{3y}{5}\vec{DC}.$$



3 pav.



4 pav.

Kadangi abi gautos vektoriaus $\vec{DP}$ išraiškos turi sutapti, tai $\frac{x}{3(x+1)}=\frac{1}{3}-\frac{y}{3}-\frac{z}{3}=\frac{z}{4}=\frac{3y}{5}$. Iš čia randame $z=\frac{4x}{3(x+1)}$,

$y=\frac{5x}{9(x+1)}$, $\frac{x}{3(x+1)}=\frac{1}{3}-\frac{5x}{27(x+1)}-\frac{4x}{9(x+1)}$. Išsprendę šią lygtį, gauname $x=\frac{9}{17}$.

Ats.: $DP:PL=9:17$.

4. Sakykime, kad piramidės $ABCD$ priešingų briaunų AB ir CD vidurio taškai yra M ir N (4 pav.), o briaunų AC ir BD vidurio taškai – P ir Q. Kadangi atkarpos MP ir QN yra trikampių ABC ir DBC vidurio linijos, tai $MP \parallel BC \parallel QN$, t. y. taškai M, P, Q, N yra vienoje plokštumoje, einančioje per lygiagrečias tieses MP ir QN; todėl tos plokštumos tiesės MN ir PQ susikerta taške E. Sakykime, kad $ME:EN=x$, $PE:EQ=y$. Tuomet

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AM}+x\overrightarrow{AN}}{1+x}=\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\right)=$$

$$=\frac{1}{2(1+x)}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2(1+x)}\overrightarrow{AC}+\frac{x}{2(1+x)}\overrightarrow{AD},$$

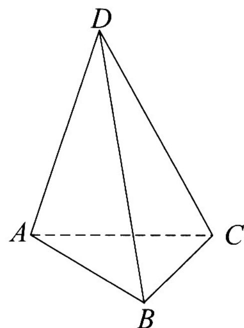
ir

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AP}+y\overrightarrow{AQ}}{1+y}=\frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{y}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})}{1+y}=$$

$$=\frac{y}{2(1+y)}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2(1+y)}\overrightarrow{AC}+\frac{y}{2(1+y)}\overrightarrow{AD}.$$

Šios vektoriaus $\overrightarrow{AE}$ išraiškos sutampa, kai teisingos lygybės $\frac{1}{2(1+x)}=\frac{y}{2(1+y)}$, $\frac{x}{2(1+x)}=\frac{1}{2(1+y)}$, $\frac{x}{2(1+x)}=\frac{y}{2(1+y)}$. Iš čia $x=1$, $y=1$, t. y. taškas E atkarpas MN ir QP dalija pusiau. Jei briaunų AD ir BC vidurio taškai K ir L, tai tiesės MN ir KL kertasi taške F. Analogiškai įrodoma, kad $MF:FN= =KF:FL=1$, t. y. taškai E ir F sutampa.

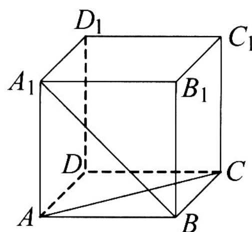
5. Jei piramidės $ABCD$ (5 pav.) briaunos AB ir CD statmenos, tai $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0$. Kadangi $\vec{CD}=\vec{AD}-\vec{AC}$, tai $\vec{AB}\cdot(\vec{AD}-\vec{AC})=0$. Iš čia $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\vec{AB}\cdot\vec{AC}$. Analogiškai, kai briaunos AC ir BD statmenos, tai $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=0$. Tada $\vec{AC}\cdot(\vec{AD}-\vec{AB})=0$, o iš čia – $\vec{AC}\cdot\vec{AD}=\vec{AC}\cdot\vec{AB}$. Kadangi



5 pav.

$\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$, tai $\vec{AD}\cdot\vec{BC}=\vec{AD}\cdot(\vec{AC}-\vec{AB})=\vec{AD}\cdot\vec{AC}-$ $-\vec{AD}\cdot\vec{AB}=0$, nes $\vec{AD}\cdot\vec{AC}=\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\vec{AD}\cdot\vec{AB}$. Taigi $AD\perp BC$.

6. Raskime kampą φ tarp gretimų kubo sienų $ABCD$ ir ABB_1A_1 prasilenkiančių įstrižainių AC ir A_1B (6 pav.). Kadangi kampas φ yra lygus kampui tarp vektorių $\vec{AC}$ ir $\vec{A_1B}$, tai $\cos\varphi=\dfrac{\vec{AC}\cdot\vec{A_1B}}{|\vec{AC}|\cdot|\vec{A_1B}|}$. Akivaizdu, kad $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$, $\vec{A_1B}=\vec{AB}-\vec{AA_1}$. Jei kubo briaunos ilgis lygus a, tai



6 pav.

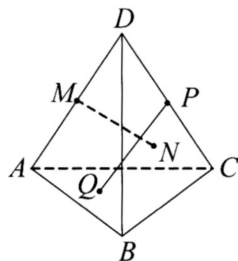
$\vec{AB}^2=\vec{AD}^2=\vec{AA_1}^2=a^2$, $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}=\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}=0.$

Todėl $\vec{AC}\cdot\vec{A_1B}=(\vec{AB}+\vec{AD})\cdot(\vec{AB}-\vec{AA_1})=\vec{AB}^2=a^2$,

7. $|\vec{AC}|=\sqrt{2}a$, $|\vec{A_1B}|=\sqrt{2}a$ ir $\cos\varphi=\dfrac{a^2}{\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a}=\dfrac{1}{2}$. Iš čia gauname, kad $\varphi=60^\circ$.

Ats.: $\varphi=60^\circ$.

7. Sakykime, kad taisyklingojo tetraedro $ABCD$ briaunos ilgis a (7 pav.). Ieškodami kampo tarp tiesių MN ir PQ, pirmiausia raskime kampą φ tarp vektorių $\vec{MN}$ ir $\vec{PQ}$ pagal formulę $\cos\varphi = \dfrac{\vec{MN}\cdot\vec{PQ}}{|\vec{MN}|\cdot|\vec{PQ}|}$. Vektorius $\vec{MN}$ ir $\vec{PQ}$ išreikškime nekomplanariais vektoriais $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$:



7 pav.

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) - \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AD},$$

$$\vec{PQ} = \vec{AQ} - \vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC}) - \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) =$$

$$= \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AD}.$$

Kadangi $\vec{AB}^2 = \vec{AC}^2 = \vec{AD}^2 = a^2$,

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AC}\cdot\vec{AD} = \vec{AB}\cdot\vec{AD} = a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2},$$

tai $\vec{MN}\cdot\vec{PQ} = \left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AD}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AD}\right) =$

$$= \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{18}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{1}{18}a^2 - \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{2} -$$

$$- \frac{1}{18}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{36}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}a^2 = -\frac{a^2}{72},$$

$$|\vec{MN}| = \sqrt{\vec{MN}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AD}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{36}a^2 + \frac{2}{9}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2},$$

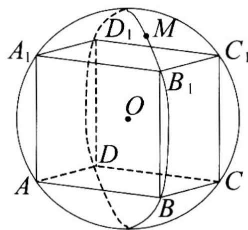
$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\overrightarrow{PQ}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{36}a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}\cdot\frac{a^2}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{2}.$$

Tuomet $\cos\varphi=\dfrac{-\dfrac{a^2}{72}}{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}}=-\dfrac{1}{18}$. Taigi $\varphi=\arccos\left(-\dfrac{1}{18}\right)=$ $=\pi-\arccos\dfrac{1}{18}$. Šis kampas yra bukasis. Vadinasi, kampas tarp tiesių MN ir PQ yra lygus $\arccos\dfrac{1}{18}$.

Ats.: $\arccos\dfrac{1}{18}$.

8. Sakykime, kad apibrėžtos apie kubą $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sferos centras yra taškas O, M – bet kuris sferos taškas (8 pav.). Aišku, kad



8 pav.

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD},$$
$$\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB_1},$$
$$\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC_1},\ \overrightarrow{MD_1}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD_1}.$$

Kadangi

$$\overrightarrow{MO}^2=\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{OD}^2=\overrightarrow{OA_1}^2=\overrightarrow{OB_1}^2=\overrightarrow{OC_1}^2=$$

$=\overrightarrow{OD_1}^2=R^2$ (čia R – sferos spindulys), tai

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2+\overrightarrow{MA_1}^2+\overrightarrow{MB_1}^2+\overrightarrow{MC_1}^2+\overrightarrow{MD_1}^2=$$

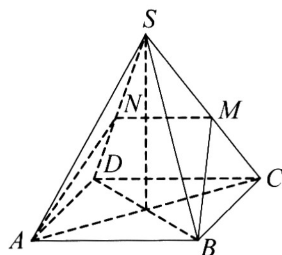
$$=16R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}).$$

Bet $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC_1}$, todėl $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{0}$. Analogiškai gauname, kad ir $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{0}$. Taigi su bet kuriuo sferos tašku M teisinga lygybė

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2+MD_1^2=16R^2.$$

9. Keturkampio $ABMN$ plotą skaičiuokime pagal formulę (žr. 9 pav.)

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AM}^2\cdot\overrightarrow{BN}^2-(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN})^2}.$$



9 pav.

Turime:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AS}}{5}=$$

$$=\frac{3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+2\overrightarrow{AS}}{5},$$

$$\overrightarrow{BN}=\frac{3\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BS}}{5}=\frac{3(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB})}{5}=$$

$$=\frac{-5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AS}}{5}.$$ Kadangi $\overrightarrow{AS}^2=b^2$, $\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2=a^2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}=a\cdot b\cos\angle A=a\cdot b\cdot\frac{\frac{1}{2}AB}{AS}=ab\cdot\frac{a}{2b}=\frac{a^2}{2},$$

tai $\overrightarrow{AM}^2=$

$$=\frac{1}{25}\left(9\overrightarrow{AB}^2+9\overrightarrow{AD}^2+4\overrightarrow{AS}^2+18\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}+12\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}\right)=$$

$$= \frac{2}{25}\left(15a^2 + 2b^2\right),$$

$$\overrightarrow{BN}^2 =$$

$$= \frac{1}{25}\left(25\,\overrightarrow{AB}^2 + 9\,\overrightarrow{AD}^2 + 4\,\overrightarrow{AS}^2 - 30\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - 20\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS} + 12\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}\right) =$$

$$= \frac{2}{25}\left(15a^2 + 2b^2\right),$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN} =$$

$$= \frac{1}{25}\left(-15\,\overrightarrow{AB}^2 + 9\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + 6\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS} - 15\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + 9\,\overrightarrow{AD}^2 + \right.$$

$$\left. + 6\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS} - 10\,\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB} + 6\,\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AD} + 4\,\overrightarrow{AS}^2\right) = \frac{2}{25}\left(-a^2 + 2b^2\right),$$

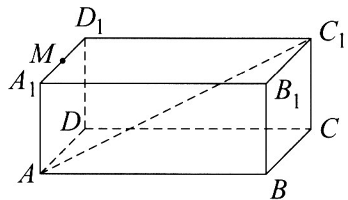
tai $S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{625}\left(15a^2 + 2b^2\right)^2 - \frac{4}{625}\left(-a^2 + 2b^2\right)^2} =$

$$= \frac{4a}{25}\sqrt{14a^2 + 4b^2}.$$

Ats.: $\frac{4a}{25}\sqrt{14a^2 + 4b^2}$.

10. Atstumą nuo taško M iki tiesės AC_1 rasime pagal formulę

$$d = \frac{\sqrt{\overrightarrow{AM}^2 \cdot \overrightarrow{AC_1}^2 - (\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC_1})^2}}{|\overrightarrow{AC_1}|}.$$



10 pav.

Kadangi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$,

$\overrightarrow{AA_1}^2 = 9$, $\overrightarrow{AB}^2 = 36$, $\overrightarrow{AD}^2 = 16$,

$$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}=\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}=0,$$

tai

$$\vec{AM}^2=\vec{AA_1}^2+\frac{1}{4}\vec{AD}^2=9+\frac{1}{4}\cdot 16=13,$$

$$\vec{AC_1}^2=\vec{AB}^2+\vec{AD}^2+\vec{AA_1}^2=61,$$

$$\vec{AM}\cdot\vec{AC_1}=\vec{AA_1}^2+\frac{1}{2}\vec{AD}^2=9+\frac{1}{2}\cdot 16=17,$$

Vadinasi,

$$d=\frac{\sqrt{13\cdot 61-17^2}}{\sqrt{61}}=\sqrt{\frac{504}{61}}.$$

Ats.: $\sqrt{\frac{504}{61}}$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad per n dienų buvo parduota 4000 tortų. Tada

$$\frac{2\cdot 105+10\,(n-1)}{2}\cdot n=4000\sim n^2+20n-800=0.$$

Šios lygties teigiamas sprendinys yra 20. Taigi per 20 dienų buvo parduota 4000 tortų. Per 20-ąją dieną buvo parduota $105+10\,(20-1)=295$ tortai. Per likusias 6 dienas $(26-20=6)$ buvo parduota $6\cdot(295-13)=1692$ tortai ir tai sudaro $\frac{1692}{4000}\cdot 100=42{,}3\,\%$ tortų, parduotų virš plano.

Ats.: 42,3 %.

2. Sakykime, kad kraštinės BC ilgis lygus a. Tada $AB=a-d$, o $CA=a+d$. Apskaičiuokime trikampio ABC plotą dviem būdais:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot h_a \text{ ir}$$

$$S_{ABC} = p \cdot r = \frac{a - d + a + a + d}{2} \cdot r = \frac{3}{2} ar;$$

p – trikampio pusperimetris.

Iš čia

$$\frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{3}{2} ar \Rightarrow h_a = 3r.$$

Ats.: $3r$.

3. Sakykime, kad Kristina turėjo n dėžučių ir į pirmąją dėžutę įdėjo k gintaro gabalėlių, o į n-ąją dėžutę – a_n gabalėlių. Sudėję lygybes $a_2 = a_1 + 5$, $a_3 = a_2 + 5$, ..., $a_{n-1} = a_{n-2} + 5$, $a_n = a_{n-1} + 5$ gauname: $a_n = 5(n-1) + k$. Kadangi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n\left(k + \frac{5}{2}(n-1)\right),$$

tai

$$n\left(k + \frac{5}{2}(n-1)\right) = 352.$$

Kadangi

$$n\left(k + \frac{5}{2}(n-1)\right) > \frac{5}{2} n(n-1),$$

tai

$$n(n-1) < \frac{704}{5} \Rightarrow n < 12.$$

Iš lygybės $n \cdot (2k + 5(n-1)) = 704$ išplaukia, kad 704 dalijasi iš n. Taigi $n \in \{2; 4; 8; 11\}$. Tik su $n = 11$ skaičius k yra natūralusis. Jis lygus 7.

Ats.: 11, 7.

4. *1 būdas.* Sakykime, kad plėšikų yra n. Krūvelėse esančių monetų skaičių surašome į lentelę:

1					
3	5				
7	9	11			
13	15	17	19	...	
⋮	....				⋮
⋮					⋮
b_n	....				b_{2n}

Sekos 1, 3, 7, 13, ..., b_n gretimų narių skirtumai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas $d=2$. Remdamiesi (12) formule, gauname: $b_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2 - n + 1$.

n-ojoje eilutėje yra n narių, kurie sudaro aritmetinę progresiją. Taigi $b_{2n} = b_n + 2(n-1) = n^2 + n - 1$. Aukso krūvelių skaičius yra: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Sudarome lygtį:

$$1+3+5+...+(n^2+n-1) = 25\,502\,500, \text{ t. y.}$$

$$\frac{1+n^2+n-1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 25\,502\,500 \Rightarrow n = 100.$$

Plėšikų vadas gavo $\frac{b_n + b_{2n}}{2} \cdot n = \frac{n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1}{2} \cdot n = n^3$,

t. y. $100^3 = 1\,000\,000$ auksinių monetų.

2 būdas. Jeigu piratų skaičius n, tai aukso krūvelių skaičius –

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\frac{n(n+1)}{2}$-asis nelyginis skaičius yra

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1.$$

Sudarome lygtį: $1+3+5+...+(n^2+n-1) = 25\,502\,500$.

Toliau sprendžiame kaip ir pirmuoju būdu.

Ats.: 100, 1 000 000.

5. Sakykime, kad skaičiai yra a, b ir c. Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 2b = a + c - 4, \\ (b-1)^2 = a(c-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac, \\ 2b = a + c - 4, \\ 2b - 1 = 5a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac, \\ a = \dfrac{2b-1}{5}, \\ c = \dfrac{8b+21}{5}. \end{cases}$$

Iš antrosios ir trečiosios lygčių (a ir b išraiškas įrašę į pirmąją lygtį) gauname $9b^2 - 34b + 21 = 0$. Šios lygties sprendiniai: $b_1 = 3$, $b_2 = \frac{7}{9}$.

Kai $b_1 = 3$, tai $a_1 = 1$, $c_1 = 9$. Kai $b_2 = \frac{7}{9}$, tai $a_2 = \frac{1}{9}$, $c_2 = \frac{49}{9}$.

Ats.: (1; 3; 9) ir $\left(\frac{1}{9}; \frac{7}{9}; \frac{49}{9}\right)$.

6. Sakykime, kad $0 < a < b < c$. Tada

$$b^2 = ac \text{ ir } \left(\sqrt{c^n} - \sqrt{a^n}\right)^2 > 0,$$

Iš čia $a^n + c^n > 2\sqrt{(ac)^n} = 2\sqrt{(b^2)^n} = 2b^n$.

7. Pertvarkykime reiškinį:

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\dfrac{1}{\log_x a} - \dfrac{1}{\log_x b}}{\dfrac{1}{\log_x b} - \dfrac{1}{\log_x c}} = \frac{(\log_x b - \log_x a)\cdot \log_x c}{(\log_x c - \log_x b)\cdot \log_x a} =$$

$$= \frac{\log_x \frac{b}{a}}{\log_x \frac{c}{b}} \cdot \frac{\log_x c}{\log_x a} = \frac{\log_x c}{\log_x a} = \frac{\log_a x}{\log_c x}, \text{ nes } \frac{b}{a} = \frac{c}{b}.$$

8. Pagal sąlygą $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = (1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2\sin^2 x}$. Išspręskime šią lygtį.

Turime

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x},$$

t. y. $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos x - \frac{1}{2} = 1$ arba $\cos x - \frac{1}{2} = -1$. Lygtis $\cos x - \frac{1}{2} = 1$ sprendinių neturi, o lygties $\cos x - \frac{1}{2} = -1$ (t. y. $\cos x = -\frac{1}{2}$) sprendiniai yra: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Kai $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, tai

$$1-\cos 2x = 1-\cos\left(\pm\frac{4\pi}{3} + 4n\pi\right) = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)} = \frac{1}{2\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}.$$

Taigi skaičiai $\frac{3}{2}$, -1, $\frac{2}{3}$ yra k-asis, $(k+1)$-asis ir $(k+2)$-asis geometrinės progresijos nariai. Šios progresijos vardiklis $q = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. Pagal sąlygą $b_{15} = b_1 q^{14} = \frac{27}{8}$, o $b_k = b_1 q^{k-1} = \frac{3}{2}$.

Vadinasi, $\frac{b_k}{b_{15}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{27}{8}} = \frac{4}{9}$. Kita vertus,

$$\frac{b_k}{b_{15}} = \frac{b_1 q^{k-1}}{b_1 q^{14}} = q^{k-15} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-15}.$$

Iš lygties $\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-15} = \frac{4}{9}$ gauname $k = 17$.

Ats.: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$, $k = 17$.

9. Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 3{,}5, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{147}{16}. \end{cases}$$

Jos sprendinys: $q = \frac{1}{7}$, $b_1 = 3$. Tada $\frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{3^3}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^3} = \frac{1029}{38}$.

Ats.: $\frac{1029}{38}$.

10. Sakykime, kad $(2007 + n)$-aisiais metais tarnautojo mėnesinis atlyginimas yra x_n ($x_0 = 2000$ Lt). Tada $x_{n+1} = 1{,}05x_n + 200$, $x_0 = 2000$.

Seka $(b_n)_{n\geq 0}$ su $b_n = x_n - (-4000) = x_n + 4000$ yra geometrinė progresija; čia $x = -4000$ yra lygties $x = 1{,}05x + 200$ sprendinys. Šios progresijos $b_0 = x_0 + 4000 = 6000$. Taigi $b_n = 6000 \cdot 1{,}05^n$, o $x_n = 6000 \cdot 1{,}05^n - 4000$.

Surasime mažiausią natūralųjį skaičių *n,* su kuriuo $6000\cdot 1{,}05^n-4000>5000$, t. y. $1{,}05^n>\frac{1}{2}$. Nesunku įsitikinti (pavyzdžiui, su skaičiuokliu), kad toks skaičius $n=9$. Taigi $2007+9=2016$ metais tarnautojo atlyginimas viršys 5000 Lt.

Ats.: $6000\cdot 1{,}05^n-4000$, 2016 m.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
$\frac{100}{501}$	$\left(\frac{23}{36};\frac{3}{4}\right)$	$x_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$; $x_7=\frac{6563}{2187}\approx 3{,}0009$	$p(B)=\frac{19}{30}$; $p=\frac{3}{19}\approx 0{,}1579$



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*